Auxiliar nº3: Cálculo en Varias Variables

Profesor: Michal Kowalczyk
Auxiliares: Emilio Vilches & Gonzalo Mena

1 de abril, 2009

Pregunta 1

1. Sean M un subespacio vectorial de $\left(\mathbb{R}^d, ||\cdot||\right)$y $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Probar que existe $m_0 \in M$ que materializa la distancia de x_0 a M, es decir

$$||x_0 - m_0|| = dist\,(x_0,\, M) := \inf\left\{||x_0 - m||\; m \in M\right\}$$

   Para esto demuestre que todo subespacio vectorial M de $\mathbb{R}^d$ es cerrado y que existe una sucesión acotada $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $||x_0 - m_n|| \longrightarrow dist\,(x_0, M)$ cuando $n \longrightarrow \infty$.

2. Sea M un subespacio propio de $\mathbb{R}^d$. Probar que existe un vector x de la esfera unitaria, tal que $d(x,\, M) = 1$

Pregunta 2

Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado y $g : C \to \mathbb{R}^m$ definida por $g(x) = f(x) + x$ donde $f : C \to \mathbb{R}^m$ es Lipschitz de constante $K < 1$, es decir:

$$||f(x) - f(y)|| \leq K||x - y|| \quad \forall x, y \in C$$

1. Muestre, usando la desigualdad triangular, que si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de puntos de C, entonces se tiene

$$||x_p - x_q|| \leq \frac{1}{1-K}||g\,(x_p) - g\,(x_q)\,|| \quad \forall p, q \in \mathbb{N}$$

2. Suponiendo que $\{g\,(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge, pruebe que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un punto $x \in C$

3. Suponiendo que f es continua muestre que la imagen de g es cerrada

Pregunta 3

Considere $D_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 4\right\}$,$D_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 4 < x^2 + y^2 \leq 9\right\}$.
Para $\lambda \in \mathbb{R}$ se define:

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 - \lambda & si\ (x, y) \in D_1 \\ 0 & si\ (x, y) \in D_2 \end{cases}$$

1. Encuentre λ tal que f sea continua en $D_1 \cup D_2$
2. Pruebe que $Gr(f) := \{(x,\ y,\ f(x, y)) \,|\, (x, y) \in D_1 \cup D_2\}$ es compacto (el conjunto recién definido se conoce como grafo de f)
3. Pruebe que dado cualquier $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ existe un punto en el grafo de f que minimiza la distancia a (x_0, y_0, z_0)

Pregunta 4

Para $a \in \mathbb{R}$ se define $f_a(x) := (x^2 - 1)^2 + ax$

1. Verifique que $\lim\limits_{||x|| \longrightarrow \infty} f(x) = +\infty$
2. Muestre que para cada $a \in \mathbb{R}$, f_a alcanza su mínimo
3. Definamos $g(a) := \min\limits_{x \in \mathbb{R}} f_a(x)$. Pruebe que g es continua