Clase Auxiliar: Cálculo en Varias Variables

Michael Kowalczyc & Emilio Vilches

25 de Marzo de 2008

P1. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

estudiar la continuidad de f sobre $\mathbb{R}^2$.

P2. Estudie el límite de la siguiente función en el origen:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(xy)^2}{(xy)^2+(x-y)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

P3. Estudiar la continuidad de la siguiente función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\cos y - y\cos x - x + y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

P4. Sea $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una función continua con la propiedad "$\lim\limits_{\|x\|\to\infty} f(x) = \infty$", es decir

$$\forall L \in \mathbb{R} \quad \exists K \in \mathbb{N} \text{ tal que } \|x\| \geq L \Rightarrow f(x) \geq L$$

a) Demuestre que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ el conjunto

$$S_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^N \colon f(x) \leq \lambda\}$$

es cerrado y acotado.

b) Demuestre que f alcanza un mínimo en $\mathbb{R}^N$

P5. Sea $\phi\colon \mathbb{R}^N\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ una función continua, relativamente a $\mathbb{R}^N\backslash\{0\}$, y defina $f\colon \mathbb{R}^N\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ como:

$$f(x) = \phi\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$$

Demostrar que f alcanza su mínimo y su máximo sobre su dominio.