Clase Auxiliar: Cálculo en Varias Variables

Michael Kowalczyc & Emilio Vilches

18 de Marzo de 2008

P1. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ probar que:

a) $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

b) $\|\frac{1}{2}(x + y)\|^2 \leq \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2$.

c) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$ (Identidad del paralelogramo).

P2. Demuestre las siguientes propiedades:

a) Si $A \subseteq B$ entonces $\text{int}(A) \subseteq \text{int}(B)$.

b) Si $A_1, A_2, ..., A_n$ son abiertos entonces $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ es abierto.

c) Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de abiertos entonces $\bigcup_{i\in I} A_i$ es abierto.

P3. Demuestre que el conjunto $S = \{y \in \mathbb{R}^N : \|x\| = 1\}$ es cerrado en $\mathbb{R}^N$.

P4. Para los siguientes conjuntos, determine interior, adherencia y frontera.

a) $A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1, x^2 + y^2 < 1\right\}$

b) $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (n, n + 1)$

c) $C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2, 0 < r < 1, r \in \mathbb{Q}\right\}$

d) $D = \left\{\left(\frac{1}{k}, (-1)^k\right) \in \mathbb{R}^2 \mid k \in \mathbb{N}\right\}$

P5. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^N$ y $a \in \mathbb{R}^N$ se define

$$A + a = \{x + a : x \in A\} \quad A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$$

a) Pruebe que si A es abierto entonces $A + a$ es abierto.

b) Pruebe que si A es abierto entonces $A + B$ es abierto.

P6. Sea $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ continua, pruebe que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$

a) $S_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^N : f(x) \leq \lambda\}$ es un conjunto cerrado.

b) $S_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^N : f(x) = \lambda\}$ es un conjunto cerrado.

c) $S_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^N : f(x) < \lambda\}$ es un conjunto abierto.

P7. Sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, donde $\mathbb{R}^n$ está dotado de la norma euclidiana $\|\cdot\|$. Se dice que F es contractante si $\exists k \in \mathbb{R}$ tal que $0 < k < 1$ y $\|F(x) - F(y)\| \leq k\|x - y\|$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$. En lo que sigue F será una función contractante. Considere la sucesión definida por $x_{n+1} = F(x_n)$:

a) Demuestre que $\|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n\|x_1 - x_0\|$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) Pruebe que $\|x_{n+p} - x_n\| \leq \frac{k^n}{1-k}\|x_1 - x_0\|$ $\forall p \in \mathbb{N}$. Concluya que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

c) Demuestre que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un x^* tal que $F(x^*) = x^*$ (llamado Punto fijo de F).

d) Demuestre que x^* es único.