MA2001 - Cálculo en Varias Variables.
Profesor: Alejandro Jofré.
Auxiliares: Pedro Montealegre, César Vigouroux.

Pauta Control 1

$\boxed{\text{P1.}}$ a) Una función n: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se dirá norma sí $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{R}$:

I) $n(x) \geq 0$ y $n(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

II) $n(\alpha x) = |\alpha|\, n(x)$

III) $n(x+y) \leq n(x) + n(y)$

Demostremos que n cumple estas tres propiedades:

I) $n(x) \geq 0$, ya que $n(x) = \|x\| + \|Ax\|$, y como $\|\cdot\|$ es norma $\Rightarrow \|x\| \geq 0$ y $\|Ax\| \geq 0$.
PDQ: $n(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
$\boxed{\Rightarrow}$ Si $n(x) = 0 \Rightarrow \|x\| + \|Ax\| = 0 \Rightarrow (\|x\| = 0) \wedge (\|Ax\| = 0)$
$\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$, ya que $\|\cdot\|$ es norma.(0,8 ptos)
$\|Ax\| = 0 \Rightarrow Ax = 0$, ya que $\|\cdot\|$ es norma. Además, como A es invertible, $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$
Luego, $n(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
$\boxed{\Leftarrow}$ Si $x = 0 \Rightarrow (\|x\| = 0) \wedge (Ax = 0 \Rightarrow \|Ax\| = 0) \Rightarrow n(x) = 0$ (0,2 ptos)

II) $n(\alpha x) = \|\alpha x\| + \|A(\alpha x)\| = |\alpha|\, \|x\| + \|\alpha\, (Ax)\| = |\alpha|\, \|x\| + |\alpha|\, \|Ax\| = |\alpha|\, n(x)$ (0,5 ptos)

III) $n(x+y)$
$= \|x+y\| + \|A(x+y)\|$
$= \|x+y\| + \|Ax + Ay\|$
$\leq \|x\| + \|y\| + \|Ax\| + \|Ay\|$
$= \|x\| + \|Ax\| + \|y\| + \|Ay\|$
$= n(x) + n(y)$
Luego, $n(x+y) \leq n(x) + n(y)$ (0,5 ptos)

b) Recordemos que para $x, y \in \mathbb{R}^n$, se define el producto punto como: $< x, y >= \sum_{i=1}^n x_i y_i$.
Además, una función $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se puede escribir en función de sus componentes:
$g(x) = (g_1(x), g_2(x), ..., g_n(x))$, con $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \forall i \in \{1, ..., n\}$.
Luego, $< g(x), x - x_0 >= \sum_{i=1}^n g_i(x)(x_i - (x_0)_i)$

i) $f(x) =< g(x), x - x_0 > + f(x_0)$
Sabemos que $\nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ (0,2 ptos).
Calculemos las derivadas parciales:
$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}$
$= \frac{\partial \sum_{i=1}^n g_i(x)(x - x_0)_i + f(x_0)}{\partial x_j} = \frac{\partial \sum_{i=1}^n g_i(x)(x - (x_0))_i}{\partial x_j} + \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_j} = \frac{\partial \sum_{i=1}^n g_i(x)(x - x_0)_i}{\partial x_j}$
$= \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j}(x - x_0)_i + g_i(x) \frac{\partial (x - x_0)_i}{\partial x_j} \right] = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j}(x - x_0)_i + g_j(x) \right]$(0,8 ptos)
$\Rightarrow \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_j} = g_j(x_0)$
$\Rightarrow \nabla f(x_0) = g(x_0)$(1 pto)

ii) Como g es diferenciable
$\Rightarrow g$ es continua (0,5 ptos)
$\Rightarrow g_i$ es continua $\forall i \in \{1, ...n\}$ (0,5 ptos)
$\Rightarrow f$ tiene derivadas parciales continuas en $x_0 \Rightarrow f$ es diferenciable en x_0 (1 pto)

$\boxed{\text{P3.}}$

a) Escribamos F, en función de sus componentes: $F(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z))$, con $F_1(x,y,z) = z - xf^2(y+z)$ y $F_2(x,y,z) = x + yf(xz^2)$ (0,5 ptos)

$DF(x,y,z) = \begin{pmatrix} DF_1 \\ DF_2 \end{pmatrix}$(0,5 ptos). Calculemos DF_1 yDF_2:

$DF_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -f^2(y+z) & -2xf(y+z)f'(y+z) & 1-2xf(y+z)f'(y+z) \end{pmatrix}$ (1 pto)

$DF_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+yz^2f'(xz^2) & f(xz^2) & 2xyzf'(xz^2) \end{pmatrix}$ (1pto)

Luego,

$$DF(x,y,z) = \begin{pmatrix} -f^2(y+z) & -2xf(y+z)f'(y+z) & 1-2xf(y+z)f'(y+z) \\ 1+yz^2f'(xz^2) & f(xz^2) & 2xyzf'(xz^2) \end{pmatrix}$$

b) i) $Df(x,y) = \begin{pmatrix} Df_1 \\ Df_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ y^2 & 2xy \end{pmatrix}$ (0,2 ptos). f es diferenciable en todo su domino, ya que sus funciones componentes son diferenciables. Esto último, debido a que las derivadas parciales de las funciones componentes son continuas.(0,3 ptos)

ii) Razonemos por inducción:

Para $n = 1$, $f_1 = f \Rightarrow Df_1(1,1) = Df(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^1$(0,3 ptos)

Suponemos que la igualdad se cumple para n, demostremos que se cumple para $n+1$:
Como $f_{n+1} = f_n \circ f$ (0,2 ptos) se tiene, por regla de la cadena, que:
$Df_{n+1} = Df_n(f(1,1))Df(1,1)$ (1 pto)$\Rightarrow$ como $f(1,1) = (1,1)$ y por hipótesis de inducción: $Df_{n+1} = Df_n(1,1)Df(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{n+1}$ (1 pto)

Nota: Pueden haber definido $f_{n+1} = f \circ f_n$, en este caso al aplicar regla de la cadena queda $Df_{n+1} = Df(f_n(1,1))Df_n(1,1)$ y debían notar que
$(1,1) = f(1,1) = f(f(1,1)) = ... = f_n(1,1)$ y se concluye igual que antes.

Se puede hacer este problema sin inducción, siempre y cuando se haya usado la regla de la cadena y estén bien explicados los pasos importantes (a los que se les asigna puntaje).