**MA2001 - Cálculo en Varias Variables.**
**Profesor:** Alejandro Jofré. **Auxiliares:** Pedro Montealegre, César Vigouroux.

# Control 1

Miércoles 22 de Abril de 2009

**P1.**

a) (2 puntos) Sea $A$ una matriz invertible $\in \mathcal{M}_{n\times n}$. Se define $n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como $n(x) = \|x\| + \|Ax\|$. Demuestre que $n$ es una norma.

b) Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Sea $x_0 \in A$ y $g : A \to \mathbb{R}^n$ función diferenciable en $x_0$, tal que $\forall x \in A$: $f(x) - f(x_0) =< g(x), x - x_0 >$.

   i) (2 puntos) Calcule $\nabla f(x_0)$

   ii) (2 puntos) Pruebe que $f$ es diferenciable en $x_0$

**P2.**

a) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{y^2-x}}$

   i) (1 punto) Determine $Dom(f)$, y haga un bosquejo de este.

   ii) (1 punto) Determine y haga un bosquejo de las curvas de nivel $N_c$ para todo c.

   iii) (1 punto) Estudie continuidad de $f$.

b) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = 1 - \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 2\right)^2$

   i) (2 puntos) Encuentre la ecuación del plano tangente al grafo de $f$ en $(0, 1)$ y $(3, 4)$

   ii) (1 punto) Encuentre y bosqueje el conjunto $N_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / f(x, y) = 0\}$ y (en el mismo dibujo) bosqueje la intersección del plano tangente a $(0, 1)$ con $z = 0$

**P3.**

a) (3 puntos.) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \in C^1$. Se define $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ como $F(x, y, z) = (z - xf^2(y + z), x + yf(xz^2))$. Calcule la matriz Jacobiana de $F$ donde exista.

b) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (x^2y, xy^2)$

   i) (0,5 puntos) Calcule el Jacobiano de $f$. Es $f$ diferenciable? Justifique.

   ii) (2,5 puntos) Sea $f_n = f \circ f \circ ... \circ f$ $n$ veces (ie. $f_0 = id$, $f_1 = f$, $f_2 = f \circ f$, etc ... ). Pruebe que el Jacobiano de $f_n$ en $(1, 1)$ es $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^n$

Tiempo: 3 Horas