Control 2 MA22A Cálculo en varias variables
Semestre Otoño 2007

Profesor: Alejandro Jofré.
Auxiliares: Sebastián Court, Julio Deride.

Pregunta 1. Se dice que una función $f(x,y)$ es armónica si verifica

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ armónica y sean

$$x = e^u \cos v \quad y = e^u \sin v.$$

Consideremos la función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como

$$g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v)).$$

(a) [5pts] Pruebe que $\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = e^{2u} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right]$.

(b) [1pt] Pruebe que g es armónica.

Pregunta 2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que

$$f(0,4,-1) = 25$$

y además

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,4,-1) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,4,-1) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(0,4,-1) = -1.$$

(a) Calcule la derivada direccional de f en el punto $(0,4,-1)$ en la dirección del vector $(1,-3,4)$.

(b) Encuentre la dirección para la cual la derivada direccional es máxima. Calcule dicha derivada direccional.

(c) Encuentre la derivada direccional de f en el punto $(0,4,-1)$ en la dirección normal a la superficie

$$4x^2 + y^2 + 9z^2 = 25,$$

en dicho punto.

(d) Encuentre el plano tangente a la superficie $f(x,y,z) = 25$ en el punto $(0,4,-1)$.

Pregunta 3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = 3x^4 - 4x^2 y + x^2 + y^2$.

(a) Encuentre los puntos críticos de f.

(b) Clasifique los puntos críticos encontrados en (a) utilizando la condición de segundo orden.

Pregunta 4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Considere la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \tag{1}$$

donde v es constante no nula.
Nos proponemos determinar todas las soluciones de la ecuación anterior:

a) Sea $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un cambio de variable definido por $\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} u = x + vt \\ w = x - vt \end{pmatrix}$.
Muestre que la función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(u,w) = f \circ \phi^{-1}(u,w)$ está bien definida y que es de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$.

b) Usando el cambio de variable anterior, demuestre que la ecuación (1) se transforma en:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial w}(u,w) = 0 \qquad \forall (u,w) \in \mathbb{R}^2 \tag{2}$$

c) Determine la solución general de la ecuación (2) y deduzca una solución general para $f(x,t)$ solución de la ecuación (1). Encuentre una solución particular para f que no sea la función nula, ni un polinomio.