

MA2001 - Cálculo en Varias Variables.**Profesor:** Alejandro Jofré.**Auxiliares:** Pedro Montealegre, César Vigouroux.

Clase auxiliar 1

18 de Marzo de 2009

P1. Considere las bolas $B_1 = B(x_1, r_1)$ y $B_2 = B(x_2, r_2)$, con $x_2 \in B_1$.
Pruebe que $B_2 \subseteq B(x_1, r_1 + r_2)$

P2. 1) Dada una norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^n$ y una matriz no singular P (invertible) de $n \times n$; demuestre que la función $\|x\|_P = \|Px\|$ es una norma.

2) Demuestre que en $\mathbb{R}^2$, la función $\|x\|_0 = \left(\frac{x_1^2}{9} + 4x_2^2\right)^{\frac{1}{2}}$ es una norma.

Solución:

P1. Recordemos la definición de bola:

$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x - x_0\| < r\}$. Luego, $x \in B_2 \Rightarrow \|x - x_2\| < r_2$

Pero $\|x - x_2\| = \|x - x_2 + x_1 - x_1\| = \|(x - x_1) - (x_2 - x_1)\| \geq \|x - x_1\| - \|x_2 - x_1\|$

$\Rightarrow \|x - x_1\| - \|x_2 - x_1\| < r_2 \Rightarrow \|x - x_1\| < \|x_2 - x_1\| + r_2$

Además, $x_2 \in B_1 \Rightarrow \|x_2 - x_1\| < r_1$

$\Rightarrow \|x - x_1\| < \|x_2 - x_1\| + r_2 < r_1 + r_2 \Rightarrow \|x - x_1\| < r_1 + r_2$

$\Rightarrow x \in B(x_1, r_1 + r_2)$

P2. Recordemos que una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ se dirá norma sí:

(a) $\|x\| \geq 0$ y $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(b) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

(c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

1) Debemos demostrar que $\|\cdot\|_P$ satisface (a),(b) y (c):

(a) $\|x\|_P = \|Px\| \geq 0$, ya que $\|\cdot\|$ al ser norma, cumple (a).

Más aún, si $\|x\|_P = \|Px\| = 0$ usando que $\|\cdot\|$ es norma, se tiene que $\|Px\| = 0 \Leftrightarrow Px = 0$.

Pero P es no singular (invertible); entonces, $Px = 0 \Leftrightarrow x = 0$, luego $\|\cdot\|_P$ cumple (a)

(b) Sea $\alpha \in \mathbb{R} : \|\alpha x\|_P = \|P(\alpha x)\| = \|\alpha Px\| = |\alpha| \|Px\| = |\alpha| \|x\|_P$

(Aquí usamos que $\|\cdot\|$ es norma $\Rightarrow$ cumple (b))

(c) Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$

$\|x + y\|_P = \|P(x + y)\| = \|Px + Py\| \leq \|Px\| + \|Py\| \leq \|x\|_P + \|y\|_P$

(Aquí usamos que $\|\cdot\|$ es norma $\Rightarrow$ cumple (c))

Con esto, queda demostrado que $\|\cdot\|_P$ es norma.

2) Notar que esta sección es un caso particular de la parte 1), cuando:

$$\|x\| = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} \text{ y } P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

En efecto,

$$\|x\|_0 = \left(\frac{x_1^2}{9} + 4x_2^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\left(\frac{x_1}{3}\right)^2 + (2x_2)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\| = \|Px\|$$

Si no notaron lo anterior, seguramente trataron de demostrar que $\|\cdot\|_0$ cumple (a),(b) y (c), pero probar la desigualdad triangular (c) puede ser complicado.

Intentemos primero demostrarla para $\|x\| = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}$ (norma usual)

$$\begin{aligned} & \|x+y\| \\ &= \left\| \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} \right\| \\ &= \left((x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= (x_1^2 + 2x_1y_1 + y_1^2 + x_2^2 + 2x_2y_2 + y_2^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= (x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1y_1 + x_2y_2) + y_1^2 + y_2^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= (x \cdot x + x \cdot y + y \cdot y)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Usando la desigualdad de Cauchy-Schwartz ($x \cdot y \leq \|x\| \|y\|$) nos queda:

$$\|x+y\| = (x \cdot x + x \cdot y + y \cdot y)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|x\| + \|y\|$$

(Ejercicio: hacer esta demostración para $x \in \mathbb{R}^n$)

La desigualdad triangular de $\|\cdot\|_0$ se concluye de observar que:

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\|_0 = \left(\left(\frac{x_1}{3}\right)^2 + (2x_2)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left\| \begin{pmatrix} \frac{x_1}{3} \\ 2x_2 \end{pmatrix} \right\|$$

Luego,

$$\begin{aligned} & \|x+y\|_0 \\ &= \left\| \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} \right\|_0 \\ &= \left(\left(\frac{x_1+y_1}{3}\right)^2 + (2(x_2+y_2))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\| \begin{pmatrix} \frac{x_1}{3} + \frac{y_1}{3} \\ 2x_2 + 2y_2 \end{pmatrix} \right\| \\ &= \left\| \begin{pmatrix} \frac{x_1}{3} \\ 2x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{y_1}{3} \\ 2y_2 \end{pmatrix} \right\| \\ &\leq \left\| \begin{pmatrix} \frac{x_1}{3} \\ 2x_2 \end{pmatrix} \right\| + \left\| \begin{pmatrix} \frac{y_1}{3} \\ 2y_2 \end{pmatrix} \right\| = \|x\|_0 + \|y\|_0 \end{aligned}$$

Con esto y demostrando que $\|\cdot\|$ cumple (a) y (b) (propuesto) se concluye que $\|\cdot\|$ es norma.