

## MA2001-2: pauta pregunta n°2, examen

Profesor: Rafael Correa F.  
Auxiliares: Raimundo Briceño, Adolfo Henríquez,  
Gonzalo Mena & Emilio Vilches

04 de julio, 2009

### Pregunta 2

1. Justifique la existencia y encuentre el valor máximo de:

$$\begin{aligned} f(x) &= \prod_{i=1}^n x_i \\ \text{s.a. } \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{i^2} &= 1 \end{aligned}$$

indicando algún punto donde se alcanza.

2. Dada una función  $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$  de clase  $\mathcal{C}^1$  y los vectores  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ , definimos la función  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  por:

$$u(\vec{x}) = v(\vec{a} \cdot \vec{x})$$

Demuestre que los jacobianos  $J_u, J_v$  de  $u$  y  $v$ , respectivamente, verifican la igualdad:

$$J_u(\vec{x}) \vec{b} = J_v(\vec{a} \cdot \vec{x}) \vec{a} \cdot \vec{b}$$

### Solución

1.

Definimos por  $g(x) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{i^2} - 1$  la función restricción. Notemos que  $f$  y  $g$  son polinomios, luego de clase  $\mathcal{C}^\infty$  (en particular, de clase  $\mathcal{C}^1$ ). Por la continuidad de  $g$  y la restricción de igualdad, el conjunto de puntos que satisface la restricción es cerrado. Además, es acotado (luego compacto), pues  $1 = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{i^2} \geq \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \implies \|x\|_2 \leq n$ . Por Weierstrass, el máximo es alcanzado

(1 pto.). Vemos los puntos que cumplen la condición necesaria de Lagrange:

$$\begin{aligned} \nabla f(x) &= \lambda \nabla g(x) \\ \iff \prod_{i \neq j}^n x_i &= 2\lambda \frac{x_j}{j^2} \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \end{aligned} \quad (1)$$

Multiplicando por  $x_j$  la igualdad  $j$ -ésima, obtenemos:

$$\prod_{i=1}^n x_i = 2\lambda \frac{x_j^2}{j^2}, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

Sumando sobre todas las igualdades  $\sum_{j=1}^n()$ :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left( \prod_{i=1}^n x_i \right) &= 2\lambda \sum_{j=1}^n \frac{x_j^2}{j^2} \\ \implies n \prod_{i=1}^n x_i &= 2\lambda \end{aligned} \quad (2)$$

Asumimos que  $x_j \neq 0, \forall j \in \{1, \dots, n\}$ . Si no, se obtiene la solución nula para cualquier punto factible con alguna coordenada nula. Luego, despejando  $\lambda$  en (2) y reemplazando en (1):

$$\begin{aligned} \prod_{i \neq j}^n x_i &= 2 \left( \frac{n}{2} \prod_{i=1}^n x_i \right) \frac{x_j}{j^2} \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \\ \implies 1 &= n \frac{x_j^2}{j^2} \\ \implies x_j &= \pm \frac{j}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Luego, tomando todos los  $x_j > 0$ , obtenemos el vector  $x^* = \frac{1}{\sqrt{n}} (1, 2, \dots, n)$ , que claramente es máximo (pues cualquier otra combinación de signos, o bien es negativa, o bien tiene el mismo valor), con  $f(x^*) = \frac{n!}{n^{\frac{n}{2}}}$ . Notemos que  $f(x^*) > 0$ , lo que descarta la solución nula como máximo global. Adicionalmente, notemos que para que se cumpla la independencia lineal del gradiente de las restricciones, basta con que  $x_i \neq 0$ , para algún  $i$ , lo cual se cumple en este caso (2 ptos.).

## 2.

Definimos la función lineal continua  $\ell_{\vec{a}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ , como  $\ell_{\vec{a}}(\vec{x}) = \vec{a} \cdot \vec{x}$ . Luego, notemos que  $u = v \circ \ell_{\vec{a}}$ . Por regla de la cadena, se tiene que:

$$Du(\vec{x}) = Dv(\ell_{\vec{a}}(\vec{x})) \circ D\ell_{\vec{a}}(\vec{x})$$

O equivalentemente, utilizando la notación matricial  $Du(\vec{x}) = J_u(\vec{x})$ ,  $Dv(\vec{x}) = J_v(\vec{x})$ , y notando que  $D\ell_{\vec{a}}(\vec{x}) = \ell_{\vec{a}}$  (pues  $\ell_{\vec{a}}$  es lineal):

$$J_u(\vec{x}) = J_v(\vec{a} \cdot \vec{x}) \circ \ell_{\vec{a}}$$

Luego,  $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\begin{aligned} J_u(\vec{x}) \left( \vec{b} \right) &= J_v(\vec{a} \cdot \vec{x}) \circ \ell_{\vec{a}} \left( \vec{b} \right) \\ \iff J_u(\vec{x}) \vec{b} &= J_v(\vec{a} \cdot \vec{x}) \vec{a} \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

pues la composición equivale al producto en funciones lineales de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^m$  (3 ptos.).