

MA2001-2: pauta pregunta n°4, examen

Profesor: Rafael Correa F.

Auxiliares: Raimundo Briceño, Adolfo Henríquez,
Gonzalo Mena & Emilio Vilches

03 de julio, 2009

Pregunta 4

Si definimos $F(x, y) = e^{x-y} - x - y - 1$ tenemos entonces que $F(0, 0) = 0$, $\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = -e^{x-y} - 1 \Rightarrow \frac{\partial F(0, 0)}{\partial y} = -2 \neq 0$. Además, F es claramente de clase C^1 (de hecho, de clase C^∞). Podemos aplicar entonces el *T.F.I.*, de donde se deduce inmediatamente la existencia y unicidad de la función φ , a priori de clase C^1 definida en algun abierto $\mathcal{U} \ni 0$. Esta función satisface $F(x, \varphi(x)) = 0 \iff e^{x-\varphi(x)} - x - \varphi(x) - 1 = 0$ (1.0). Para probar mayor regularidad de φ hacemos el cálculo de su derivada. Se cumple, por construcción de φ que $\varphi(0) = 0$. Derivando la igualdad con respecto a x obtenemos

$$(1 - \varphi'(x))e^{x-\varphi(x)} - 1 - \varphi'(x) = 0$$

$$\varphi'(x) = \frac{e^{x-\varphi(x)} - 1}{e^{x-\varphi(x)} + 1}$$

Acá vemos que $\varphi'(x)$ es un cociente de dos funciones C^1 (pues $\varphi(x)$ es C^1) además el denominador nunca se indefine $\Rightarrow \varphi'$ es $C^1 \Rightarrow \varphi$ es C^2 . Claramente $\varphi'(0) = 0$.

Análogamente hacemos el cálculo de la segunda derivada, que puede quedar en función de $\varphi(x), \varphi'(x)$

$$\varphi'(x) = \frac{(e^{x-\varphi(x)} + 1)((1 - \varphi'(x))e^{x-\varphi(x)} - (e^{x-\varphi(x)} - 1)(1 - \varphi'(x))e^{x-\varphi(x)})}{(e^{x-\varphi(x)} + 1)^2}$$

Evalutando en 0 $\varphi'(0) = \frac{1}{2}$

Ahora calculamos el límite usando L'Hopital dos veces

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi''(x)}{2} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Asignación de puntaje: Usar correctamente TFI 1.0 puntos. Demostrar que $\varphi(x)$ es de clase C^3 1.0 puntos. Cálculo correcto de $\varphi'(x), \varphi''(x)$ 2.0 puntos. Demostración de que el límite es $\frac{1}{4}$, 2.0 puntos