Examen: Cálculo en Varias Variables

Profesor : Rafael Correa
Auxiliares : R. Briceño, A. Henriquez, G.Mena y E. Vilches
Viernes 3 de Julio de 2009

P3. *a*) Dado un conjunto simétrico $A \subseteq \mathbb{R}^3$(es decir, $\vec{x} \in A \Leftrightarrow -\vec{x} \in A$) y una función $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ integrable, que verifica

$$f(-\vec{x}) = -f(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \tag{1}$$

Demuestre que

$$\iiint\limits_A f = 0$$

Indicación: Para esto considere la transformación $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(\vec{u}) = -\vec{u}$ y haga el cambio de variables $\vec{x} = T(\vec{u})$.

b) Calcular el área de la parte de la esfera de radio a con centro en el origen, que queda al interior del cilindro de ecuación $x^2 - ax + y^2 = 0$.

Solución:

a) Usando el cambio de variables $T(\vec{u}) = -\vec{u}$,el cual es claramente inyectivo y de clase C^1 [**0.5 puntos**]. se tiene que $\det JT(\vec{u}) = (-1)^3$, luego $|\det JT(\vec{u})| = 1$ [**1 punto**]. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\iiint\limits_A f(\vec{x})dxdydz &= \iiint\limits_{-A} f(-\vec{u})|\det JT(\vec{u})|dudvdw \\ &= \iiint\limits_A -f(\vec{u})dudvdw \\ &= -\iiint\limits_A f(\vec{x})dxdydz\end{aligned}$$

Donde $-A = \{-\vec{x}\colon \vec{x} \in A\}$ y la penúltima igualdad se tiene pues A es simétrico y por (1)[**1 punto**].
de donde

$$\iiint\limits_A f(\vec{x})dxdydz = 0$$

[**0.5 puntos**].

b) Debemos calcular

$$A = A_+ + A_-$$

donde

$$A_\pm = \iint\limits_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z_\pm}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_\pm}{\partial x}\right)^2} dxdy$$

para $z_\pm = \pm\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

donde $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$ **[0.5 puntos]**.
Por simetría $A = 2A_+$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

Así

$$A_+ = \iint\limits_R \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{a^2 - x^2 - y^2}}dxdy = \iint\limits_R \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}dxdy$$

[1.0 punto]
Parametrizamos R en coordenadas polares

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

por lo tanto

$$R = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \colon \theta \in [0, 2\pi], 0 \leq r \leq a\cos\theta\}$$

[1.0 punto]
y finalmente

$$\begin{aligned} A_+ &= \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{a\cos\theta} \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}} r dr d\theta \\ &= a \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{a\cos\theta} \frac{d}{dr}\left(-\sqrt{a^2 - r^2}\right) dr d\theta \\ &= a^2(2\pi - 4) \end{aligned}$$

[0.5 puntos]