MA2001-2: pauta pregunta n°3, control n°3

Profesor: Rafael Correa F.
Auxiliares: Raimundo Briceño, Adolfo Henríquez,
Gonzalo Mena & Emilio Vilches

26 de junio, 2009

Pregunta 3

Considere la curva C en $\mathbb{R}^3$ formada por la intersección del cono de ecuación $z^2 = 2x^2 + 2y^2$ y el plano de ecuación $z = 1 - x - y$. Calcule usando el método de multiplicadores de Lagrange la distancia de la curva C al origen. *Indicación: para facilitar el cálculo de derivadas parciales, calcule la distancia al cuadrado del origen a la curva C.*

Solución

Calcular la distancia de la curva al origen se puede plantear como el siguiente problema de minimización (utilizando la indicación):

$$\begin{array}{lrcccc} \min & f(x,y,z) & = & x^2+y^2+z^2 & & \\ s.a. & g_1(x,y,z) & = & z^2-2x^2-2y^2 & = & 0 \\ & g_2(x,y,z) & = & x+y+z-1 & = & 0 \end{array}$$

Teniendo esto, planteamos el sistema de Lagrange:

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda_1 \nabla g_1(x,y,z) + \lambda_2 \nabla g_2(x,y,z)$$

O equivalentemente, incluyendo las restricciones:

$$\begin{array}{rcll} 2x & = & -4\lambda_1 x + \lambda_2 & (1) \\ 2y & = & -4\lambda_1 y + \lambda_2 & (2) \\ 2z & = & 2\lambda_1 z + \lambda_2 & (3) \\ z^2 & = & 2x^2+2y^2 & (4) \\ 1 & = & x+y+z & (5) \end{array}$$

Restando las ecuaciones (1) y (2), nos da la siguiente igualdad:

$$(1+2\lambda_1)(x-y) = 0$$

Luego, $\left[\lambda_1 = -\frac{1}{2}\right] \vee [x = y]$. Si consideramos el caso $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$, tenemos que:

$$\begin{array}{rcl} \lambda_1 = -\frac{1}{2} & \Longrightarrow^{(1)} & \lambda_2 = 0 \\ & \Longrightarrow^{(3)} & z = 0 \\ & \Longrightarrow^{(4)} & x = y = 0 \\ & \Longrightarrow^{(5)} & 1 = 0 \qquad \Rightarrow\Leftarrow \end{array}$$

Luego, necesariamente se tiene que $x = y$. Así, el sistema anterior queda de la siguiente forma (reemplazando y por x):

$$\begin{array}{rcll} 2x & = & -4\lambda_1 x + \lambda_2 & (1') \\ 2z & = & 2\lambda_1 z + \lambda_2 & (2') \\ z^2 & = & 4x^2 & (3') \\ 1 & = & 2x + z & (4') \end{array}$$

Tomando en cuenta la igualdad $(4')$ y la hipótesis $x = y$:

$$\begin{array}{rcc} z = 1 - 2x & \Longrightarrow^{(3')} & (1-2x)^2 = 4x^2 \\ & \Longrightarrow & 1 - 4x + 4x^2 = 4x^2 \\ & \Longrightarrow & x^* = \frac{1}{4} = y^* \\ & \Longrightarrow^{(4')} & z^* = \frac{1}{2} \\ & \Longrightarrow^{(1'),(2')} & \lambda_1^* = \frac{1}{4}, \lambda_2^* = \frac{3}{4} \end{array}$$

Luego, el único punto que satisface el sistema es: $(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2)^* = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$. Además,

$$\nabla g_1 \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \nabla g_2 \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

son vectores linealmente independientes. Finalmente, notando que $f(x, y, z)$ es coerciva y que el candidato a mínimo local es único, el punto $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ debe ser mínimo global. Así, la distancia de la curva C al origen es:

$$\left\| \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \right\|_2 = \sqrt{f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$