Control 1: Cálculo en Varias Variables

Profesor : Rafael Correa
Auxiliares : R. Briceño, A. Henriquez, G.Mena y E. Vilches
Miércoles 22 de Abril de 2009

P1. Sea $\vec{E} = \mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$

a) Si C_1 y C_2 son dos convexos cerrado en el e.v.n $(\vec{E}, \|\cdot\|_\infty)$, demuestre que $C_1 \cap C_2$ es también un convexo cerrado.

b) Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente en $\left(\vec{E}, \|\cdot\|_\infty\right)$ demuestre que

$$\lim \int_0^1 f_n(t)dt = \int_0^1 f(t)dt$$

c) Dados los conjuntos

$$A = \{f \in \vec{E} \mid \int_0^1 f(t)dt = 1\}$$
$$B = \{f \in \vec{E} \mid f(\frac{1}{2}) = 0\}$$

demuestre que $A \cap B$ es un convexo cerrado en $\left(\vec{E}, \|\cdot\|_\infty\right)$.

d) Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en A, demuestre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a una función $f \in A$.

P2. Sea $\vec{E} = \mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$ y $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la sucesión en $\vec{E}$ definida por

$$f_k(x) = \begin{cases} -kx+1 & x \in [0, \frac{1}{k}] \\ 0 & x \in [\frac{1}{k}, 1] \end{cases}$$

a) Demuestre que $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente en $\left(\vec{E}, \|\cdot\|_1\right)$ donde $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$.

b) ¿ Es $\left(\vec{E}, \|\cdot\|_1\right)$ un espacio de Banach ?.

c) Calcule el límite puntual de $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

d) ¿Es $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergente en $\left(\vec{E}, \|\cdot\|_\infty\right)$?.

P3. Sea H un espacio de Hilbert y $F\colon H \to H$ una aplicación que verifica las propiedades

$$\begin{aligned} i) \quad & < Fx - Fy, x - y > \geq \alpha\|x-y\|^2 \quad \forall x, y \in H \\ ii) \quad & \|Fx - Fy\| \leq \beta\|x-y\| \quad \forall x, y \in H \end{aligned}$$

donde $\alpha > 0$, $\beta > 0$ son dos constantes dadas.

a) Demuestre que F es inyectiva.
Indicación: Use la desigualdad de Cauchy-Schwartz en *i*).

b) Para demostrar que F es epiyectiva, siga los siguientes pasos:
Para $y \in H$, $\lambda > 0$ fijos; definamos la aplicación

$$\phi_{y,\lambda} \colon H \to H, \quad \phi_{y,\lambda}(x) = x - \lambda\,(F(x) - y)$$

1) Demuestre que $\phi_{y,\lambda}$ es Lipschitziana.
2) Demuestre que para un λ adecuado, $\phi_{y,\lambda}$ es contractante.
3) Usando el teorema de punto fijo aplicado a $\phi_{y,\lambda}$, demuestre que F es epiyectiva.

P4. Sea $\vec{E}$ el espacio de sucesiones en $\mathbb{R}$ convergentes. Sea $\vec{E}_0 \subseteq \vec{E}$ el subespacio de las funciones convergentes a 0.
Sean $N_\infty \colon \vec{E} \to \mathbb{R}$, $\ell \colon \vec{E} \to \mathbb{R}$ las aplicaciones

$$N_\infty((x_n)) = \sup\{|x_n| \,|\, n \in \mathbb{N}\}$$
$$\ell((x_n)) = \lim_{n\to\infty} x_n$$

a) Demuestre que N_∞ es norma en $\vec{E}$.

b) Demuestre que ℓ es lineal continua en el e.v.n. $\left(\vec{E}, N_\infty\right)$.

c) Demuestre que $\vec{E}_0$ es cerrado en el e.v.n. $\left(\vec{E}, N_\infty\right)$.

d) Calcule $\|\ell\|$.

Tiempo: 3 hrs.