Control 3: Cálculo en Varias Variables

Profesor : Rafael Correa
Auxiliares : R. Briceño, A. Henriquez, G.Mena y E. Vilches
Miércoles 24 de Junio de 2009

P1. *a*) dada una función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2, homogénea de grado $m \geq 2$, es decir, para todo $t \in \mathbb{R}$ verifica

$$f(tx, ty) = t^m f(x,y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2 \tag{1}$$

1) Demuestre que f verifica la igualdad

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = (m-1)mf(x,y) \quad \forall x, y \tag{2}$$

Indicación: Para obtener (2), derive dos veces c/r a t la igualdad (1)

2) Si f es positiva en una región convexa $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^2$, demuestre que f es convexa en $\mathcal{R}$

b) Dada una función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2, se define $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Demuestre que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta)$$

P2. *a*) Para una función $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^2 se define el Laplaciano de f en un punto $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ por

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\vec{x})$$

Si f y g son de clase C^2 demuestre que se tiene la identidad

$$\Delta(fg)(\vec{x}) = f(\vec{x})\Delta g(\vec{x}) + g(\vec{x})\Delta f(\vec{x}) + 2\nabla f(\vec{x})\nabla g(\vec{x})$$

b) Dada la función

$$f(x,y) = \frac{-1}{x^2+y^2+1}.$$

1) Calcule la aproximación de orden 2 de esta función en $(0,0)$. Muestre que se trata de una forma cuadrática convexa.
2) Muestre que $(0,0)$ es mínimo estricto de f.

P3. Considere la curva $\mathcal{C}$ en $\mathbb{R}^3$ formada por la intersección del cono de ecuación

$$z^2 = 2x^2 + 2y^2$$

y el plano de ecuación

$$z = 1 - x - y.$$

Calcule usando el método de multiplicadores de Lagrange, la distancia de la curva $\mathcal{C}$ al origen.
Indicación: Para facilitar el cálculo de derivadas parciales, calcule la distancia al cuadrado del origen a la curva $\mathcal{C}$.

P4. *a*) Calcule

$$\iint\limits_{D_i} x^2y^2dxdy$$

para $i = 1, 2$ con

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \geq x^2, y \leq -x^2 + 8\}$$

y

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon xy \geq 1, xy \leq 2, y \geq x, y \leq 4x\}.$$

Indicación: En la integral sobre D_2 conviene hacer el cambio de variables

$$u = xy, \quad v = \frac{y}{x}$$

b) Calcule

$$\int_0^2 \int_{y/2}^1 ye^{x^3}dxdy$$

Indicación: Cambie con cuidado el orden de integración (Fubini).

c) Usando un cambio de variables a coordenadas esféricas, calcule la masa del solido que ocupa la región

$$\mathcal{R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \geq 1, z \geq 0\}$$

donde la densidad en cada punto está dada por la función

$$\rho(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Tiempo: 3 hrs.