

MA2001-2: pauta pregunta n°1, control n°3

Profesor: Rafael Correa F.

Auxiliares: Raimundo Briceño, Adolfo Henríquez,
Gonzalo Mena & Emilio Vilches

25 de junio, 2009

Pregunta 1

a)

1)(1.5 puntos) Derivemos una vez la expresión (c/r a t) $f(tx, ty) = t^m f(x, y)$ (usando regla de la cadena)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) \cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) \cdot y = mt^{m-1} f(x, y)$$

Derivando otra vez más con respecto a t, y aplicando la regla de la cadena y del producto

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(tx, ty) \cdot x + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(tx, ty) \cdot yx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(tx, ty) \cdot xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(tx, ty) \cdot y = (m-1)mt^{m-2} f(x, y)$$

Simplificando la expresión de la derecha, y evaluando en $t = 1$ obtenemos la expresión deseada

2)(1.5 puntos) Esta parte está mala, de hecho hay un contraejemplo. La asignación de puntajes fue la siguiente:

1.5 puntos por no responder nada, o escribir cosas sin sentido

3.0 puntos por responder de la forma en que nosotros hubiéramos querido, eso es, decir que de la expresión obtenida en la parte a) se puede reescribir como

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (m-1)mf(x, y)$$

Como f es positiva $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \geq 0$, lo que implica la convexidad. El problema de esta demostración es que el Hessiano se está evaluando en el mismo punto que se multiplica. Para que se tuviera la convexidad

debería tenerse $\forall (x, y), (x_0, y_0) \in \mathcal{R} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \geq$

0 que no necesariamente se tiene

3.0+Bonus: Encontrar un contraejemplo que pruebe que lo afirmado en la pregunta es Falso. Éste puede ser considerar $f(x, y) = x^3 - y^3$ en la región convexa $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\}$. Claramente f es positiva en dicha región y es homogénea de grado 3, sin embargo no es convexa, esto porque

$$Hf(x, y) = \begin{bmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -6y \end{bmatrix}$$

Luego, si evaluamos en $(x, y) = (1, \frac{1}{2}) \in R$ obtenemos $Hf(1, \frac{1}{2}) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, que no es definida positiva (sus valores propios son 6 y -3), lo que implica la no-convexidad de f

b)(3 puntos). Calculamos las primeras e g con respecto a θ, ρ , usando la regla de la cadena

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) &= \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta \\ \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) &= -r \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta + r \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta \end{aligned}$$

Ahora vemos las segundas derivadas

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta) &= \cos \theta \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta \right) \\ &\quad + \sin \theta \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta \right) \end{aligned}$$

Agrupando:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos^2 \theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta \sin \theta$$

Usando la regla del producto calculamos la segunda derivada de g con respecto a θ

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta) &= -r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) - r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ &\quad - r \sin \theta \left(-r \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta + r \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta \right) \\ &\quad + r \cos \theta \left(-r \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta + r \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta \right) \end{aligned}$$

Agrupando nuevamente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta) &= r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin^2 \theta + r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin^2 \theta - 2r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta \sin \theta \\ &\quad - r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) - r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \end{aligned}$$

Hasta aca, 2.5 puntos

Ahora sumamos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) + \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin^2 \theta + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos^2 \theta + \\ &\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin^2 \theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos^2 \theta \\ &\quad - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta \sin \theta + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta \sin \theta \\ &\quad - \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \end{aligned}$$

Simplificando obtenemos finalmente

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) + \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r \cos \theta, r \sin \theta) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

0.5 puntos por el cálculo final

Es decir, la partes a) y b) tienen 3 puntos cada una, aunque en la parte a)2) se podrían haber obtenido más de 3 puntos lo que implica una nota ≥ 8.5 (que se redistribuye en las otras preguntas)