

Auxiliar n°?: Cálculo en Varias Variables

Profesor: Rafael Correa F.
Auxiliares: Raimundo Briceño, Adolfo Henríquez,
Gonzalo Mena & Emilio Vilches

10 de junio, 2009

Pregunta 1

Sea $u : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 y sea $v : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$v(x, y) = u\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{y^2 + x^2}\right)$$

Demuestre que u es armónica $\Leftrightarrow v$ es armónica (en sus respectivos dominios de definición)

$$(u \text{ se dice armónica si } \Delta u = 0, \text{ con } \Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2})$$

Pregunta 2

1. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 y suponga que $f(tx) = t^2 f(x) \forall t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que para todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) = \frac{1}{2} \langle f''(0)x, x \rangle$$

Indicación: Considere la función $\phi(t, x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n)$

2. Sea $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^3 que verifica $F''(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que F es afín

Pregunta 3

1. Encuentre el polinomio de Taylor de orden dos en torno a $(0, 0)$ de la función $f(x, y) = \sin^2(x + y) - x^2 y$
2. Demuestre que $|F(h_1, h_2) - T_2(h_1, h_2)| \leq \frac{48}{3} \|(h_1, h_2)\|_2^3$ donde $T_2(\cdot, \cdot)$ es el polinomio de Taylor de orden dos en torno a $(0, 0)$
3. Encuentre una vecindad de $(0, 0)$ tal que el error del desarrollo de Taylor esté acotado por $R = 10^{-50}$