Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas U. de Chile 26 de septiembre de 2005

Ejercicios capitulo 6

Profesores: Rafael Correa, Pedro gajardo
auxiliares: Gonzalo Sánchez, Rodolfo Gainza

P1 Sea B una matriz de $n \times n$ simetrica, definida positiva y $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ considere la función:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \vec{x} &\longmapsto f(\vec{x}) = \vec{x}^t B \vec{x} + \vec{c}^t \vec{x} \end{aligned}$$

Encuentre el(los) minimo(s) de f sobre $\mathbb{R}^n$.

P2 Considere ahora en el problema anterior la matriz B semidefinida positiva y encuentre el(los) minimo(s) de f sobre $\mathbb{R}^n$.

P3 Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo cerrado, no vacio, y sea $y \in \mathbb{R}^n$. Demuestre la caracterizacion de la proyección de un punto sobre un convexo cerrado para espacios de Hilbert:

$$\langle y - P_C(y), x - P_C(y) \rangle \leq 0 \ \forall \ x \in C$$

Usando criterios de optimización.

P4 Considere la función f definida en el problema 1 con B definida positiva.
Encuentre el minimo de f sobre el conjunto A:

$$A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n / M\vec{x} = 0\}$$

Donde M es una matriz de rango completo.

P5 Sea $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 + x - 5$.
Minimize f en $\overline{B_2(\vec{0}, 2)}$

P6 encuentre el(los) maximo(s) y el(los) minimo(s) de la función: $f(x, y) = xy - y + x - 1$ en la bola euclideana cerrada de centro $\vec{0}$ y radio 2.

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas U. de Chile 26 de septiembre de 2005

Anexo capitulo 6 del apunte del curso MA22A año 2005

PROFESORES: RAFAEL CORREA, PEDRO GAJARDO
AUXILIARES: GONZALO SÁNCHEZ, RODOLFO GAINZA

P1 Primero veamos que la función f es convexa, para esto basta recordar que el hesiano de f es el jacoviano de la función ∇f. esto es:
$\nabla^2 f(\vec{x}) = J\nabla f(\vec{x})$
$\nabla f(\vec{x}) = 2B\vec{x} + \vec{c}$, pues f es la suma de una funcion Bilineal con una lineal.
$J\nabla f(\vec{x}) = 2B$, pues ∇f es lineal afin.
Como su jacobiano es definido positivo en todo $\mathbb{R}^n$ implica que la funcion es estrictamente convexa en $\mathbb{R}^n$, por lo que su minimo de existir sera unico, y sera el punto $\vec{x}_0$ tal que $\nabla f(\vec{x}_0) = 0$:
$\nabla f(\vec{x}_0) = 2B\vec{x}_0 + \vec{c} = 0$
$\Rightarrow \vec{x}_0 = -\frac{1}{2}B^{-1}\vec{c}$, recordando que si B es definida positiva entonces es invertible.

P2 En este caso tenemos que la función es convexa (no estricta en general) por lo que el minimo no tiene por que ser unico. Sin embargo los minimos siguen satisfaciendo $\nabla f(\vec{x}) = 0$, por lo que tenemos las ecuaciones:
$B\vec{x} = -\frac{1}{2}\vec{c}$, lo que nos lleva a dos casos posibles:

i) El sistema lineal $B\vec{x} = -\frac{1}{2}\vec{c}$ tiene solución y en este caso las soluciones seran minimos locales, y dado $\vec{x_0}$ que satisface el sistema $f(\vec{x_0}) = \frac{3}{2}\vec{c}^t\vec{x_0}$ y este valor será constante si $Ker(B) \subseteq \{\vec{c}\}^\perp$ pero este caso efectivamente se tiene pues:
Sea $\vec{x} \in Ker(B)$ entonces se tiene que:

$$\begin{array}{rcll}
B(\vec{x_0}+\vec{x}) & = & -\frac{1}{2}\vec{c} & \big/\ (\vec{x_0}+\vec{x})^t \\
(\vec{x_0}+\vec{x})^t B(\vec{x_0}+\vec{x}) & = & -\frac{1}{2}(\vec{x_0}+\vec{x})^t\vec{c} & \\
(\vec{x_0}+\vec{x})^t B\vec{x_0} + (\vec{x_0}+\vec{x})^t(B\vec{x}) & = & -\frac{1}{2}\vec{x_0}^t\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{x}^t\vec{c} & \Rightarrow\ \vec{x}^t\vec{c} = 0\ \forall\ \vec{x} \in Ker(B) \\
\vec{x_0}^t B\vec{x_0} + \vec{x}^t B\vec{x_0} & = & -\frac{1}{2}\vec{x_0}^t\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{x}^t\vec{c} & \\
-\frac{1}{2}\vec{x_0}^t\vec{c} & = & -\frac{1}{2}\vec{x_0}^t\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{x}^t\vec{c} &
\end{array}$$

ii) El sistema lineal $B\vec{x} = -\frac{1}{2}\vec{c}$ no tiene solución, en este caso tendremos que, como $Ker(B)$ es un conjunto cerrado y convexo, $\vec{c}$ se podra proyectar sobre $Ker(B)$ y sean:
$\vec{a} = P_{Ker(B)}(\vec{c})$ y sea $\vec{b} = \vec{c} - \vec{a} \neq \vec{0}$
Entonces $f(-\lambda\vec{b}) = -\lambda^2\vec{b}^t\left(B(-\vec{b})\right) - \lambda(\vec{a}^t + \vec{b}^t)\vec{b} = -\lambda\left\|\vec{b}\right\|^2$
Cantidad que no es acotada por lo cual en este caso la función no tiene minimos.

P3 La proyección de y es el punto de C que minimiza: $\|x-y\|$ por lo tanto, consideremos la función:

$$\begin{aligned} f : C &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \vec{x} &\longmapsto f(\vec{x}) = \ \|\vec{x}-y\|^2 \end{aligned}$$

Encontrar la proyección equivale al problema:
$\min\limits_{\vec{x}\in C} f(\vec{x})$
El minimo de f en C debe cumplir que :
$\langle \nabla f(\vec{x_0}), \vec{x}-\vec{x_0}\rangle \ \geqslant \ 0 \ \forall \ \vec{x}\in C$
$f(\vec{x_0}) \ = \ (y-\vec{x_0})^t(y-\vec{x_0}) \ = \ \|y\|^2 - 2\vec{x_0}^{\,t}y + \vec{x_0}^{\,t}\vec{x_0}$
$\Rightarrow \ \nabla f(\vec{x_0}) = -2(y-\vec{x_0})$
Supongamos que el minimo existe y sea $\vec{x_0}$ entonces:

$$\begin{aligned} \langle -2(y-\vec{x_0}), \vec{x}-\vec{x_0}\rangle \quad &\geqslant \quad 0 \quad \forall \vec{x}\in C \\ &\Rightarrow \\ \langle y-\vec{x_0}, \vec{x}-\vec{x_0}\rangle \quad &\leqslant \quad 0 \quad \forall \vec{x}\in C \end{aligned}$$

Finalmente para ver la existencia basta ver que la función es estrictamente convexa pues $\nabla^2 f(\vec{x})$ es definida positiva para todo $\vec{x}\in\mathbb{R}$ y si se intersecta C con una bola cerrada lo suficiente mente grande se tendrá que se busca el minimo de una función continua sobre un compacto y fuera de esta bola (si se centra en y) la funcion tendrá un valor mayor.

P4 Trabajaremos por medio de los multiplicadores de lagrange supongamos que M es de rango m (i.e. es una matriz de m filas) por lo que el lagrangeano es:

$$\begin{aligned} L(\vec{x},\lambda_1,...,\lambda_m) \quad &= \quad f(\vec{x}) \ + \ sumai = 0m\lambda_i M_{\cdot,i}\vec{x} \\ L(\vec{x},\vec{\lambda}) \quad &= \quad f(\vec{x}) \ + \ \vec{\lambda}^t M\vec{x} \\ L(\vec{x},\vec{\lambda}) \quad &= \quad \vec{x}^t B\vec{x} \ + \ \vec{c}^t\vec{x} \ + \ \vec{\lambda}^t M\vec{x} \\ L(\vec{x},\vec{\lambda}) \quad &= \quad \vec{x}^t B\vec{x} \ + \ (\vec{c}+M^t\vec{\lambda})^t\vec{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 \quad = \quad \nabla_{\vec{x}} L(\vec{x_0},\vec{\lambda_0}) \quad &= \quad 2B\vec{x_0} \ + \ (\vec{c}+M^t\vec{\lambda_0}) \\ \Rightarrow \qquad \vec{x_0} \quad &= \quad -\tfrac{1}{2}B^{-1}(\vec{c}+M^t\vec{\lambda_0}) \qquad (1) \\ 0 \quad = \quad \nabla_{\vec{\lambda}} L(\vec{x_0},\vec{\lambda_0}) \quad &= \quad M\vec{x_0} \qquad\qquad\qquad\quad (2) \end{aligned}$$

Multiplicando por la izquierda la ecuacion (1) obtenemos:

$$\begin{aligned} 0 \quad = \quad M\vec{x_0} \quad &= \quad -\tfrac{1}{2}MB^{-1}\vec{c} \ + \ MM^t\vec{\lambda_0} \\ \Rightarrow \qquad \vec{\lambda_0} \quad &= \quad \tfrac{1}{2}\left(MM^t\right)^{-1}MB^{-1}\vec{c} \end{aligned}$$

Recordando que como M es de rango de filas completo MM^t es invertible. Y finalmente remplazando en la eccuación (1) se tiene:
$\vec{x_0} \ = \ -\frac{1}{2}B^{-1}\vec{c} \ - \ \frac{1}{4}M^t\left(MM^t\right)^{-1}MB^{-1}\vec{c}$
Y será minimo pues el lagrangeano estrictamente convexo.

P5 Buscamos un punto que cumpla:

$$\nabla f(x,y) \ = \ \begin{pmatrix} 2x-2y+1 \\ -2x+4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rclcrcl} 2x-2y & = & -1 & & x & = & -1 \\ & & & \Rightarrow & & & \\ -2x+4y & = & 0 & & y & = & -\frac{1}{2} \end{array}$$

y por otra parte $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ que es definida positiva por lo que la funcion es estrictamente convexa y $(-1, -\frac{1}{2})$ será su unico minimo.

P6 Primero analizemos la función en el interior de la bola:
$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y+1 \\ x-1 \end{pmatrix}$ y $\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Notemos que $\forall (x,y) \in B_2(0,2)$ $\nabla^2 f$ no es ni definida positiva ni definida negativa y como la funcion es C^2 no puede tener minimos o maximos en el interior de la bola.
Consideremos la funcion ahora en el borde de la bola entonces t endremos los problemas:

$$\min_{s.a. \|\vec{x}\|^2 = 4} f(\vec{x}) \quad y \quad \max_{s.a. \|\vec{x}\|^2 = 4} f(\vec{x})$$

Para resolver estos problemas utilizamos el metodo de los multiplicadores de lagrange:
$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda \left(\|(x,y)\|^2 - 4 \right)$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_{(x,y)} L(x_0, y_0, \lambda_0) \\ \nabla_\lambda L(x_0, y_0, \lambda_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f(x_0, y_0) + 2\lambda_0 (x,y) \\ x_0^2 + y_0^2 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + 2\lambda_0 x_0 + 1 \\ x + 2\lambda_0 y_0 - 1 \\ x_0^2 + y_0^2 - 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (4) \end{matrix}$$

$(1) + (2) \Leftrightarrow (x_0 + y_0)(1 + 2\lambda_0) = 0 \Rightarrow x_0 + y_0 = 0 \vee \lambda_0 = -\frac{1}{2}$
Si $\lambda_0 = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = x - 1$ lo que remplazando en (3) nos deja:
$2x^2 - 2x - 3 = 0$ lo que nos deja los puntos:$(x_1, y_1) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{7}, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{7}\right)$ y $(x_2, y_2) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{7}, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{7}\right)$
y $f(x_1, y_1) = \frac{3}{2} = f(x_2, y_2)$
Si $x + y = 0 \Rightarrow x = -y$ remplazando en (3) obtenemos:$x^2 = 2$ y de con esto los puntos:
$(x_3, y_3) = \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ y $(x_4, y_4) = \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ y :
$f(x_3, y_3) = -3 + 2\sqrt{2}$
$f(x_4, y_4) = -3 - 2\sqrt{2}$
Como la función es C^2 y la restricción tambien todo máximo o mínimo cumple con las condiciones de lagrange por lo que (x_4, y_4) sera el mínimo y (x_1, y_1); (x_2, y_2) serán los máximos.

[1]

[1] Hecho por Gonzalo Sánchez