Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas U. de Chile **año 2005**

Ejercicios capitulo 7 del apunte del curso MA22A

PROFESORES: RAFAEL CORREA, PEDRO GAJARDO

AUXILIARES: GONZALO SÁNCHEZ, RODOLFO GAINZA

PROBLEMAS DE MEDIDA:

P1) Demuestre que $\forall\ A \subseteq \mathbb{R}^n$ medible se tiene que : $\forall\ \vec{x} \in \mathbb{R}^n,\ A+\vec{x} = \{\vec{a}+\vec{x}\ ,\ \vec{a} \in A\}$ y $\mu(A) = \mu(A+\vec{x})$

P2) Sean $A_1 \subseteq \mathbb{R}^{n_1}, ..., A_m \subseteq \mathbb{R}^{n_m}$ medibles y acotados, en R^{n_i}, μ_i medida de lebesgue en $\mathbb{R}^{n_i}$, y μ medida de lebesgue en $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_m}$. Pruebe que: $\mu(A_1 \times \cdots \times A_m) = \prod\limits_{i=1}^{m} \mu(A_i)$

P3) Sea $f:\ \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ una función continua y sea:
$G(f) = \{(\vec{x}, f(\vec{x}))\,, \vec{x} \in \mathbb{R}^n\}$
Muestre que $G(f)$ es medible en $\mathbb{R}^n$ y de medida nula.

PROBLEMAS DE INTEGRACION:

P1) Probar que si C tiene medida nula entonces $\int\limits_C f = 0$ para toda funcion medible definida en C

P2) Sea $f:\ A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ integrable y sea $g = f$ salvo en un numero finito de puntos Probar que g es integrable y que $\int\limits_A f = \int\limits_A g$

P3) Sea $f:\ A \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ una función no negativa talque $\int\limits_A f = 0$

Probar que $B = \{x \in A\ : f(x) \neq 0\}$ tiene medida nula. Ind: Prpbar que $\left\{x \in A\ : f(x) > \frac{1}{n}\right\}$ tiene medida cero.

P4) Utilizar el teorema de Fubini para dar una demostración sencilla de que $\partial^2_{xy} f = \partial^2_{yx} f$ si estas son continuas.
Ind.: si $\partial^2_{xy} f(x_0, y_0) - \partial^2_{yx} f(x_0, y_0) > 0$ existe un rectangulo entorno de (x_0, y_0) tal que $\partial^2_{xy} f - \partial^2_{yx} f > 0$ en este.

P5) Sea $f:\ [a,b] \times [c,d] \mapsto \mathbb{R}$ tal que $\partial_y f$ es continua. Se define $F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$. Probar la regla de Leibnitz:

$$F'(y) = \int\limits_a^b \partial_y f(x,y)dx$$

Ind.: $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \left(\int_c^y \partial_y f(x,y)dy + f(x,c) \right) dx$

P6) Sea $f : [a,b] \times [c,d] \mapsto \mathbb{R}$ tal que $\partial_y f$ es continua se definen: $F(x,y) = \int_a^x f(t,y)dt$ y $G(x) = \int_a^{g(x)} f(t,x)dt$. Calcular $\partial_x F$,$\partial_y F$ y $G'(x)$.

P7) Calcular:

$a)$ $\int_{-1}^{0} \int_{1}^{2} \left(x^2y^2 + xy^3\right) dydx$ $\quad$ $c)$ $\int_1^2 \int_1^x \int_1^{x+y-1} dzdydx$

$b)$ $\int_{-2}^{1} \int_{0}^{y^2} \left(x^2 + y\right) dxdy$ $\quad$ $d)$ $\int_{-1}^{1} \int_{0}^{|x|} \int_0^1 (x+y+z)dzdydx$

P8) Calcular las integrales iteradas de $f(x,y) = x\sin(y)$ sobre el conjunto $\{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq x\}$

P9) Dibuje la Región $R = \left\{(x,y,z) : z \leq 4 - 4x^2 - y^2, \ z \geq 0\right\}$ exprese el volumen de R como una integral triple y como una doble. Calcule el volumen de R.

P10) Probar que $\int_0^x \int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n)dx_n \cdots dx_2 dx_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)dt$

P11) Sea $T(u,v) = (x,y) = (u+v, u^2 - v)$ y $R = \{(u,v) : u + v \leq 2, \ u \geq 0, \ v \geq 0\}$
a) Dibuje $S = T(R)$. b) Calcule $\int_S \frac{dxdy}{\sqrt{1+4x+4y}}$

P12) Sea $T(u,v) = (x,y) = (u, v(1+u^2))$ y $R = \{(u,v) : 0 \leq u \leq 3, \ 0 \leq v \leq 2\}$
a) Dibuje $S = T(R)$. b) Calcule $\int_S xdxdy$

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas U. de Chile 21 de septiembre de 2005

Anexo capitulo 7 del apunte del curso MA22A año 2005

Profesores: Rafael Correa, Pedro gajardo

auxiliares: Gonzalo Sánchez, Rodolfo Gainza

PROBLEMAS DE MEDIDA:

P1) Para resolver este tipo de problemas lo más conveniente es empezar probandolo para rectangulos, figuras , abiertos y finalmente para conjuntos medibles acotados y luego no acotados. Para rectangulos y figuras la demostración es trivial por lo que empezaremos con conjuntos abiertos.
Sea $\theta \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y sea $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ entonces como θ es un abierto $\theta + \vec{x}$ tambien lo será, pues: $\theta = \bigcup\limits_{y\in\theta} B(y,\epsilon_y)$ donde ϵ_y es tal que $B(y,\epsilon_y) \subseteq \theta$ entonces:
$\theta + \vec{x} = \bigcup\limits_{y\in\theta} (B(y,\epsilon_y) + \vec{x}) = \bigcup\limits_{y\in\theta} B(y+\vec{x},\epsilon_y)$ y la union de abiertos es abierta, por lo que $\theta + \vec{x}$ es medible.
Veamos que sus medidas coinciden, sea $F \subseteq \theta + \vec{x}$ una figura entonces $F - \vec{x}$ es una figura contenida en θ

$$\mu(\theta+\vec{x}) = \sup_{\substack{F\subseteq\theta+\vec{x}\\ F fig.}} \mu(F) = \sup_{\substack{\bar{F}=F-\vec{x}\subseteq\theta\\ \bar{F} fig.}} \mu(\bar{F}) = \mu(\theta)$$

Sea A medible y acotado entonces $\forall\epsilon > 0 \exists K \subseteq A$ compacto y $A \subseteq \theta$ abierto tal que $\mu(K\setminus\theta) < \epsilon$ entonces: $K+\vec{x} \subseteq A+\vec{x} \subseteq \theta+\vec{x}$ con $K+\vec{x}$ es compacto y $\theta+\vec{x}$ es abierto y $(\theta+\vec{x})\setminus(K+\vec{x}) = (\theta\setminus K)+\vec{x}$ que es abierto y por lo tanto: $\mu\,(\theta+\vec{x})\setminus(K+\vec{x}) = \mu(\theta\setminus K) < \epsilon$ para todo ϵ por lo que A es medible

$$\mu(A) = \inf_{\substack{\theta ab.\\ A\subseteq\theta}} \mu(\theta) = \inf_{\substack{\theta ab.\\ A+\vec{x}\subseteq\theta+\vec{x}}} \mu(\theta+\vec{x}) = \inf_{\substack{\theta ab.\\ A+\vec{x}\subseteq\theta}} \mu(\theta) = \mu(A+\vec{x})$$

Finalmente si A es medible, no necesariamente acotado, basta con centrar las bolas en $\vec{x}$ para medir $A+\vec{x}$

P2) Razonaremos de la misma manera anterior, el caso en que los A_i son rectangulos y en el que son Figuras se deja propuesto, basta darse cuenta de que el producto de rectangulos es rectangulo y el de figuras es figura.
CASO1: Sean $A_1, ..., A_m$ abiertos evidentemente A será abierto por lo tanto medible y:

$$\mu(A) = \sup_{\substack{F\subseteq A\\ F fig.}} \mu(F) =^* \sup_{\substack{F_1\subseteq A_1 \ldots F_m\subseteq A_m\\ F_1,..,F_m figs.}} \mu(F_1\times\cdots\times F_m) = \sup_{\substack{F_1\subseteq A_1 \ldots F_m\subseteq A_m\\ F_1,..,F_m figs.}} \mu_1(F_1)\cdots\mu_m(F_m)$$
$$= \sup_{\substack{F_1\subseteq A_1\\ F_1 fig.}} \cdots \sup_{\substack{F_m\subseteq A_m\\ F_m fig.}} \mu_1(F_1)\cdots\mu(F_m) = \mu_1(A_1)\cdots\mu_m(A_m)$$

nos falta verificar $*$ en efecto:
$\sup\limits_{\substack{F\subseteq A\\ F fig.}} \mu(F) \geqslant \sup\limits_{\substack{F_1\subseteq A_1 \ldots F_m\subseteq A_m\\ F_1,..,F_m figs.}} \mu(F_1\times\cdots\times F_m)$ se tiene pues $F_1\times\cdots\times F_m \subseteq A$ y es figura. para la otra

desigualdad notemos que:
Sea $F \subseteq A$ figura y sean $\tilde{F}_i$ y $\tilde{A}_i$ sus proyecciones sobre $\vec{0}_{n_1+\cdot+n_{i-1}} \times \mathbb{R}^{n_i} \times \vec{0}_{n_{i+1}+\cdot+n_m} \cong \mathbb{R}^{n_i}$
Entonces $F_i \subseteq A_i$ y F_i será una figura parta todo i , donde F_i son las coordenadas asociadas a $\tilde{F}_i$. y $F \subseteq \bigotimes_{i=1}^{m} F_i \subseteq A$ por lo que $\mu(F) \leqslant \mu(F_1 \times \cdots \times F_m)$
CASO2: $A_1, \ldots, A_m$ medibles y acotados:
Entonces $\forall \epsilon_i \epsilon_1 \exists K_i$ compacto, θ_i abierto tal que$K_i \subseteq A_i \subseteq \theta_i \Rightarrow$ Sea $K = \bigotimes_{i=1}^{n} K_i,\ \theta = \bigotimes_{i=1}^{n} \theta_i$
$\Rightarrow\ K \subseteq A \subseteq \theta$ y $\theta \setminus K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (\theta_i \setminus k_i) \times \bigotimes_{j \neq i} \theta_j$
$\Rightarrow\ \mu(\theta \setminus K) \leqslant \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} (\theta_i \setminus k_i) \times \bigotimes_{j \neq i} \theta_j\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mu(\theta_i \setminus K_i) \prod_{j \neq i} \mu(\theta_j) \leqslant \sum \epsilon_i (cte.) = \epsilon$ Donde la constante se debe a que la medida de losθ_i se mantiene acotada. Por lo tanto A es medible y:

$$\mu(A) = \inf_{\substack{\theta ab. \\ A \subseteq \theta}} \mu(\theta) =^* \inf_{\substack{\theta_1, \ldots \theta_m abs. \\ A_1 \subseteq \theta_1, .., A_m \subseteq \theta_m}} \mu(\theta_1 \times \cdots \times \theta_m) = \inf_{\substack{\theta_1 ab. \\ A_1 \subseteq \theta_1}} \cdots \inf_{\substack{\theta_m ab. \\ A_m \subseteq \theta_m}} \mu(\theta_1) \cdots \mu(A_m) = \mu(A_1) \cdots \mu(A_m)$$

$*$ se tiene pues la forma en que se aproximo el conjunto A en la demostración de que era medibles fue por abiertos de este tipo.

P3) Utilizaremos la norma infinito por ser esta rectangular. Consideremos en $\mathbb{R}^n$ la bola cerrada $B = B(\vec{0}, r)$.
$\Rightarrow\ f$ en la bola será uniformemente continua por ser esta compacta
$\Rightarrow\ \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ t'q. $\|\vec{x} - \vec{y}\|_\infty < \delta \Rightarrow\ |f(\vec{x} - f(\vec{y})| < \epsilon$
Sea m tal que $\frac{1}{2^m} < \delta$ y consideremos un reticulado de B en bolas de tamao 2^{-m}, tomemos una de estas bolas digamos R entonces $G(f) \cap (R \times \mathbb{R}) \subseteq R \times [\min_R f, \max_R f]$
$\Rightarrow\ \mu\left(G(f) \cap (R \times \mathbb{R})\right) \leqslant \mu(R \times [\min_R f, \max_R f]) = 2^{-nm}(\max_R f - \min_R f) \leqslant 2^{-nm}\epsilon$
$\Rightarrow\ \mu\left(G(f) \cap (B \times \mathbb{R})\right) \leqslant \sum_{Ret.} \mu\left(G(f) \cap (R \times \mathbb{R})\right) \leqslant \sum_{Ret.} 2^{-nm}\epsilon \leqslant 2^{nm} 2^{-nm}\epsilon = \epsilon,\ \forall \epsilon > 0$
$\Rightarrow\ \mu\left(G(f) \cap (B \times \mathbb{R})\right) = 0,\ \forall r > 0. \Rightarrow \mu(G(f)) = 0$
Y el grafo será medible por ser cerrado.

PROBLEMAS DE INTEGRACION:

P1) Sea f positiva y sea $M = \sup_{x \in C} f(x)$ posiblemente $+\infty$ entonces:
$\int_C f \leqslant \mu(C \times [0, M)) = \mu(C)\mu([0, M)) = 0$
Consideremos f cualquiera entonces $f\ = f_+ - f_-$ y: $\int_C f = \int_C f_+ - \int_C f_- = 0$

P2) Sea $N = \{x \in A t'q. f(x) \neq g(x)\}$ como es finito es de medida nula.
$\Rightarrow\ \int_A g\ =\ \int_{A \setminus N} g + \int_N g\ =\ \int_{A \setminus N} f + \int_N g$
Como $\mu(N) = 0$ entonces $\int_N g\ =\ 0\ =\ \int_N f$

por lo tanto g es integrable y $\int\limits_A g = \int\limits_A f$. Notese que solo basta con que N sea de medida nula.

P3) Sea $B_n = \left\{x \in A :\ f(x) > \frac{1}{n}\right\}$ veamos que tiene medida nula en:
$\int\limits_{B_n} f \geqslant \int\limits_{B_n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\mu(B_n)$
y $0 = \int\limits_A f = \int\limits_{B_n} f + \int\limits_{A\setminus B_n} f \geqslant \int\limits_{B_n} f \geqslant \frac{\mu(B_n)}{n} \Rightarrow \mu(B_n) = 0\ \forall n$
Además si $m > n \Rightarrow B_n \subseteq B_m$ y se tiene que:
$B = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n \Rightarrow \mu(B) = \mu\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(B_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$

P4) Sea $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$ tal que $l = \partial^2_{xy} f(\vec{x}_0) - \partial^2_{yx} f(\vec{x}_0) \neq 0$ (s.p.g. > 0) como son continuas entonces la suma tambien por lo que $\exists B = B(\vec{x}_0, r)$ tal que $\forall \vec{x} \in B\ \partial^2_{xy} f(\vec{x}) - \partial^2_{yx} f(\vec{x}) > \frac{l}{2}$
$\Rightarrow \int\limits_B (\partial^2_{xy} f - \partial^2_{yx} f) \geqslant \mu(B)\frac{l}{2} = 2r^2 l > 0$
Sean $x_- = x_0 - r;\ x_+ = x_0 + r;\ y_- = y_0 - r;\ y_+ = y_0 + r$ entonces se tendra: $\int\limits_B (\partial^2_{xy} f - \partial^2_{yx} f) =$
$\int\limits_{x_-}^{x_+}\int\limits_{y_-}^{y_+} (\partial^2_{xy} f - \partial^2_{yx} f) dydx = \int\limits_{x_-}^{x_+}\int\limits_{y_-}^{y_+} \partial^2_{xy} f dydx - \int\limits_{x_-}^{x_+}\int\limits_{y_-}^{y_+} \partial^2_{yx} f dydx$
la segunda será igual a:
$\int\limits_{x_-}^{x_+}\int\limits_{y_-}^{y_+} \partial^2_{yx} f(x,y) dydx = \int\limits_{x_-}^{x_+} \partial_x f(x, y_+) - \partial_x f(x, y_-) dx = f(x_+, y_+) - f(x_-, y_+) - f(x_+, y_-) + f(x_-, y_-)$
Y la primera luego de aplicar el teorema de Fubini quedará:
$\int\limits_{y_-}^{y_+}\int\limits_{x_-}^{x_+} \partial^2_{xy} f(x,y) dxdy = \int\limits_{y_-}^{y_+} \partial_y f(x_+, y) - \partial_y f(x_-, y) dy = f(x_+, y_+) - f(x_+, y_-) - f(x_-, y_+) + f(x_-, y_-)$
y sumando ambos obtenemos que: $\int\limits_B (\partial^2_{xy} f - \partial^2_{yx} f) = 0$ lo cual es una contradición por lo tanto: $\partial^2_{xy} f = \partial^2_{yx} f$

P5)

$$
\begin{aligned}
F(y) &= \int\limits_a^b f(x,y)dx =_{(T.F.C.)} \int\limits_a^b \left\{ \int\limits_c^y \partial_y f(x,y)dy + f(x,c) \right\} dx \\
&=_{(Fubini)} \int\limits_c^y \int\limits_a^b \partial_y f(x,y)dxdy + \int\limits_a^b f(x,c) \qquad \diagup\ g(Y) = \int\limits_a^b \partial_y f(x,y)dx \\
&= \int\limits_c^y g(y)dy + cte. \qquad \diagup(\ )' \\
F'(y) &= g(y) = \int\limits_a^b \partial_y f(x,y)dx
\end{aligned}
$$

P6) $\partial_y F(x,y) =_{(Leibnitz)} \int\limits_a^b \partial_y F(t,y)dt;$
$\partial_x F(x,y) =_{(T.F.C)} f(x,y)$
$G(x) = F(g(x), x)$ Entonces suponiendo g diferenciable:

$$\begin{aligned} G'(x) &= \partial_x F(g(x),x)\partial_x g(x) + \partial_y F(g(x),x)\partial_y y \\ &= f(g(x),x)g'(x) + \int\limits_a^{g(x)} \partial_y F(t,y)dt \end{aligned}$$

P7) a) :

$$\begin{aligned} \int\limits_{-1}^{0}\int\limits_{1}^{2}\left(x^2y^2+xy^3\right)dydx &= \int\limits_{-1}^{0}\left\{x^2\frac{y^3}{3}\Big|_1^2 + x\frac{y^4}{4}\Big|_1^2\right\}dx = \int\limits_{-1}^{0}\tfrac{7}{3}x^2+\tfrac{15}{3}x\ dx \\ &= \tfrac{7}{3}\cdot\tfrac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{0} + \tfrac{15}{3}\cdot\tfrac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0} = \tfrac{7}{9}-\tfrac{15}{6} = \tfrac{-31}{18} \end{aligned}$$

b) :

$$\begin{aligned} \int\limits_{-2}^{1}\int\limits_{0}^{y^2} &= \int\limits_{-2}^{1}\left\{\frac{x^3}{3}\Big|_0^{y^2} + y\cdot y^2\right\}dy = \int\limits_{-2}^{1}\left\{\tfrac{y^6}{3}+y^3\right\}dy \\ &= \frac{y^7}{21}\Big|_{-2}^{1} + \frac{y^4}{4}\Big|_{-2}^{1} = \tfrac{129}{21}-\tfrac{15}{4} \end{aligned}$$

c) :

$$\begin{aligned} \int\limits_{1}^{2}\int\limits_{1}^{x}\int\limits_{1}^{x+y-1} &= \int\limits_{1}^{2}\int\limits_{1}^{x} x+y-2dydx = \int\limits_{1}^{2} x(x-1)-2(x-1)+\tfrac{x^2}{2}-\tfrac{1}{2}dy \\ &= \int\limits_{1}^{2}\tfrac{3x^2}{2}-3x+\tfrac{3}{2}dx = \frac{x^3}{2}\Big|_1^2 - \frac{3x^2}{2}\Big|_1^2 + \frac{3}{2} \\ &= \tfrac{7}{2}-\tfrac{9}{2}+\tfrac{3}{2} = \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

d) :

$$\begin{aligned} \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{0}^{|x|}\int\limits_{0}^{1}(x+y+z)dzdydx &= \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{0}^{|x|}\left\{x+y+\frac{z^2}{2}\Big|_0^1\right\}dydx = \int\limits_{-1}^{1}\left\{x\,|x|+\tfrac{|x|^2}{2}-\tfrac{x}{2}\right\}dx \\ &= \int\limits_{0}^{1}\left\{x^2+\tfrac{x^2}{2}+\tfrac{x}{2}\right\}dx + \int\limits_{-1}^{0}\left\{-x^2+\tfrac{x^2}{2}-\tfrac{x}{2}\right\}dx \\ &= \int\limits_{0}^{1}\left\{\tfrac{3x^2}{2}+\tfrac{x}{2}\right\}dx - \int\limits_{-1}^{0}\left\{\tfrac{x^2}{2}+\tfrac{x}{2}\right\}dx \\ &= \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}-\left\{\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{4}\right\} = \tfrac{5}{6} \end{aligned}$$

P8)

$$R = \{(x,y):\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant x\}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$R = \{(x,y):\ 0\leqslant y\leqslant 1,\ y\leqslant x\leqslant 1\}$$

$$\Rightarrow \int\limits_R x\sin(y)d\mu = \int\limits_0^1\int\limits_0^x x\sin(y)dydx = \int\limits_0^1\int\limits_y^1 x\sin(y)dxdy$$

$$\int\limits_0^1 -x\cos(y)\Big|_0^x dx = \int\limits_0^1 \sin(y)\frac{x^2}{2}\Big|_y^1 dy$$

$$\int\limits_0^1 x-x\cos(x)dx = \int\limits_0^1 \frac{\sin(y)}{2}-\frac{y^2\sin(y)}{2}dy$$

y con el cambio de variables $x=u$ y $\cos(x)=v'$ se tiene:

$\int_0^1 x - x\cos(x)dx \ = \frac{1}{2} - \left\{ x\sin(x)\Big|_0^1 + \int_0^1 (-\sin(x)dx) \right\} \ = \frac{3}{2} - (\cos(1)+\sin(1))$

y con el cambio de variable $\frac{y^2}{2} = u$ y $\sin(y) = v'$ se obtiene:

$\int_0^1 \frac{\sin(y)}{2} - \frac{y^2\sin(y)}{2}dy \ = \frac{1}{2}\left(\cos(0)-\cos(1)\right) - \left\{ \frac{-y^2}{2}\cos(y)\Big|_0^1 + \int_0^1 y\cos(y)dy \right\} \ = \frac{3}{2} - (\cos(1)+\sin(1))$

P9) dibujo (figura 1).

$$R \ = \left\{(x,y,z): \ z \leqslant 4-4x^2-y^2, \ z \geqslant 0\right\}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$R \ = \left\{(x,y,z): \ |x| \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{4-y^2-z}, \ |y| \leqslant \sqrt{4-z}\right\}$$

$$\begin{aligned}
V(R) &= \int_0^4 \int_{-\sqrt{4-z}}^{\sqrt{4-z}} \int_{-\frac{1}{2}\sqrt{4-y^2-z}}^{\frac{1}{2}\sqrt{4-y^2-z}} 1dxdydz \\
&= \int_0^4 \int_{-\sqrt{4-z}}^{\sqrt{4-z}} \sqrt{4-y^2-z}dydz &&= \int_0^4 \int_{-\sqrt{4-z}}^{\sqrt{4-z}} \sqrt{4-z}\sqrt{1-\tfrac{y^2}{4-z}}dy \\
&= \int_0^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)(4-z)dxdz &&= \int_0^4 \tfrac{\pi}{2}(4-z)dz \\
&= &&= 4\pi
\end{aligned}$$

P10) Sean: $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ y $F(\vec{x}) = f(x_n)$ entonces :

$$\int_0^x \int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_{n-1}} \ = \int_R F(\vec{x})$$

con R :

$$R \ = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n; \ 0 \leqslant x_1 \leqslant x, \ 0 \leqslant x_2 \leqslant x_1, ..., 0 \leqslant x_n \leqslant x_{n-1}\}$$

$$\Leftrightarrow \ R \ = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n; \ 0 \leqslant x_n \leqslant x_{n-1} \leqslant \cdots \leqslant x_2 \leqslant x_1 \leqslant x\}$$

$$\Leftrightarrow \ R \ = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n; \ 0 \leqslant x_n \leqslant x; \ x_n \leqslant x_{n-1} \leqslant x; \ldots x_2 \leqslant x_1 \leqslant x\}$$

Entonces por el teorema de Fubini:

$\int_R F(\vec{x})d\vec{x} \ = \int_0^x \int_{x_n}^x \cdots \int_{x_2}^x f(x_n)dx_1, ..., dx_n \ = \int_0^x f(x_n) \left[\int_{x_n}^x \cdots \int_{x_2}^x 1dx_1 \cdots dx_{n-1} \right] dx_n$

$\int_{x_n}^x \cdots \int_{x_2}^x 1dx_1 \cdots dx_{n-1} = \int_{x_n}^x \cdots \int_{x_3}^x (x-x_2)dx_2 \cdots dx_{n-1} = \int_{x_n}^x \cdots \int_{x_4}^x \frac{(x-x_3)^2}{2}dx_3 \cdots dx_{n-1} = \cdots = \frac{(x-x_n)^{n-1}}{(n-1)!}$

$\Rightarrow \ \int_R F(\vec{x})d\vec{x} = \int_0^x f(x_n)\frac{(x-x_n)^{n-1}}{(n-1)!}dx_n \ = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1}f(t)dt$

P11) a) $S \ = \ T(R) \ = \ \left\{(x,y) = (u+v, u^2-v), u+v \leqslant 2, \ u \geqslant 0, \ v \geqslant 0\right\} \ = \ \left\{(x,y), \ 0 \leqslant x \leqslant 2; \ -x \leqslant y \leqslant x^2\right\}$
ver figura 2.

b) $|JT(u,v)| = \left|\begin{vmatrix}1 & 2u\\ 1 & -1\end{vmatrix}\right| = |-1-2u| = |-(1+2u)| =_R 1+2u$

$$\int_S \frac{dxdy}{\sqrt{1+4x+4y}} = \int_R \frac{(1+2u)}{\sqrt{1+4u+4v+4v^2-4v}} = \int_R \frac{1+2u}{\sqrt{(1+2u)^2}} = \int_R 1$$
$$= \int_0^2 \int_0^{2-v} dudv = \int_0^2 (2-v)dv = \left.\frac{(2-v)^2}{2}\right|_0^2 = 2$$

P12) a) $S = T(R) = \left\{(x,y) = (u, v(1+u^2));\ 0 \leqslant u \leqslant 3,\ 0 \leqslant v \leqslant 2\right\} = \left\{(x,y);\ 0 \leqslant x \leqslant 3;\ 0 \leqslant y \leqslant 2(1+x^2)\right\}$
Ver figura 3.

b) $|JT(u,v)| = \left|\begin{vmatrix}1 & 2uv\\ 0 & 1+u^2\end{vmatrix}\right| = \left|1+u^2\right| = 1+u^2$

$$\int_S xdxdy = \int_R u(1+u^2)du = \int_0^3 \int_0^2 u+u^3dvdu$$
$$= 2\int_0^3 u+u^3du = 2\left\{\frac{9}{2}+\frac{81}{4}\right\} = \frac{99}{2}$$

1

[1] Hecho por Gonzalo Sánchez