

MA2001-2: Auxiliar semana n°14

Profesor: Rafael Correa F.
Auxiliares: Raimundo Briceño, Adolfo Henríquez,
Gonzalo Mena & Emilio Vilches

17 de junio, 2009

Pregunta 1

Hallar el valor máximo y mínimo de la función $f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$ en el disco $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Pregunta 2

Considere el siguiente problema de optimización:

$$(P) \begin{cases} \min & x_1^2 + \dots + x_n^2 \\ s.a. & \prod_{i=1}^n x_i = 1 \\ & x_i > 0, \forall i = 1, \dots, n \end{cases}$$

1. Resuelva (P) .
2. Pruebe que si $a_1, \dots, a_n > 0$, entonces:

$$(a_1 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$$

Pregunta 3

Sea A una matriz de $n \times n$ simétrica con coeficientes reales.

1. Sea

$$\begin{array}{rcl} f: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow x^t A x \end{array}$$

Verifique que $\nabla f(x) = 2Ax$.

2. Sea v_1 una solución del problema de minimización:

$$\begin{array}{ll} \min & x^t A x \\ s.a. & \|x\|^2 = 1 \end{array}$$

Pruebe que v_1 es vector propio de A .

3. Sea v_2 una solución del problema de minimización:

$$\begin{array}{ll} \min & x^t A x \\ \text{s.a.} & \|x\|^2 = 1 \\ & x \cdot v_1 = 0 \end{array}$$

donde v_1 es el vector de la parte anterior. Pruebe que v_2 es vector propio de A .

4. Considere v_1 y v_2 como en las partes anteriores. Se definen $v_3, \dots, v_n$ por recurrencia. Dados $v_1, \dots, v_k$, sea v_{k+1} una solución del problema:

$$\begin{array}{ll} \min & x^t A x \\ \text{s.a.} & \|x\|^2 = 1 \\ & x \cdot v_1 = 0 \\ & \vdots \\ & x \cdot v_k = 0 \end{array}$$

Demuestre que $v_3, \dots, v_n$ son vectores propios de A . Deduzca que A es diagonalizable.