

Control 2: Cálculo en Varias Variables

Profesor : Rafael Correa

Auxiliares : R. Briceño, A. Henriquez, G.Mena y E. Vilches

Miércoles 27 de Mayo de 2009

P1. Considere el espacio vectorial normado

$$E = C^1([0, 1]; \mathbb{R}) = \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f' \text{ es continua}\}$$

dotado de la norma $\|f\|_1 = \|f'\|_\infty + \|f\|_\infty$.

Considere la función

$$J: E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \mapsto J(f) = \frac{1}{2} \int_0^1 (f'(x))^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 (f(x))^2 dx$$

a) Calcule la derivada parcial $DJ(f; h)$ para $f, h \in E$.

b) Demuestre que la función

$$\begin{aligned} DJ(f; \cdot): E &\rightarrow \mathbb{R} \\ g &\mapsto DJ(f; g) \end{aligned}$$

es lineal y continua.

c) Demuestre que la función J es diferenciable.

P2. Definamos

$$\Omega = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathbb{R}^2 : 1 < r < 3, \theta \in (0, \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{7\pi}{4}, 2\pi)\}$$

Considere la función

$$\begin{aligned} f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right) \end{aligned} \tag{1}$$

a) Pruebe que f es diferenciable en Ω y calcule $Df(x, y)$ para cada $(x, y) \in \Omega$.

b) Pruebe que existe $L > 0$ tal que $\forall x, y \in \Omega$ se tiene $\|\nabla f(x, y)\|_2 \leq L$, y deduzca que

$$\|Df(x, y)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})} \leq L$$

c) Demuestre que f no es Lipschitziana.

Indicación: Considere $\vec{x}^\epsilon = (2, \epsilon)$, $\vec{x}_\epsilon = (2, -\epsilon)$, con $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño de modo que $\vec{x}^\epsilon, \vec{x}_\epsilon \in \Omega$.

Muestre que

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} |f(\vec{x}^\epsilon) - f(\vec{x}_\epsilon)| &= \pi \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|\vec{x}^\epsilon - \vec{x}_\epsilon\|_2 &= 0. \end{aligned}$$

- d) En clases vimos un teorema que nos daba hipótesis para que una función diferenciable $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, sea Lipschitz en Ω con constante de Lipschitz $L \geq \sup_{x \in \Omega} \|Df(x)\|$. ¿Por qué ese teorema no se puede aplicar a la función f definida en (1)?.

P3. Considere el sistema de 3 ecuaciones con 4 incógnitas

$$x^3 + y^3 + z^3 + t^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2$$

$$x + y + z + t = 0$$

- a) Muestre que es posible despejar (x, y, z) en función de t en una vecindad de $t = 0$, es decir existe

$$\phi: [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

tal que $(\phi(t), t)$ verifica las tres ecuaciones $\forall t \in [-\epsilon, \epsilon]$.

Indicación: Aplique al sistema de ecuaciones el teorema de la función implícita en el punto $(x, y, z, t) = (0, -1, 1, 0)$.

- b) Calcule la derivada de la función ϕ en el punto $t = 0$.

P4. Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación de clase C^1 y sea $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación definida a partir de f por

$$g(u, v) = f(\cos u + \sin v, \sin u + \cos v, e^{u-v})$$

- a) Demuestre que g es de clase C^1 .
- b) Usando la fórmula para el diferencial de la composición de dos funciones, sabiendo que la matriz asociada a $Df(1, 1, 1)$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcule la matriz asociada a $Dg((\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))$.

Tiempo: 3 hrs.