MA2001-2: pauta pregunta n°4, control n°2

Profesor: Rafael Correa F.
Auxiliares: Raimundo Briceño, Adolfo Henríquez,
Gonzalo Mena & Emilio Vilches

13 de junio, 2009

Pregunta 1

3. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación de clase $\mathcal{C}^1$ y sea $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación definida a partir de f por

$$g(u,v) = f\left(\cos u + \sin v, \cos v + \sin u, e^{u-v}\right)$$

a)Demuestre que g es de clase $\mathcal{C}^1$

b)Usando la fórmula para el diferencial de la composición de dos funciones, sabiendo que la matriz asociada a $Df(1,1,1)$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcule la matriz asociada a $Dg\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Solución:

a) Podemos expresar $g(u,v) = (f \circ h)(u,v)$ con $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$h(u,v) = \left(\cos u + \sin v, \cos v + \sin u, e^{u-v}\right)$$

Notemos que h es de clase $\mathcal{C}^1$ pues cada componente lo es, y esto último por álgebra de funciones de clase $\mathcal{C}^1$(sin($\cdot$),cos($\cdot$), $e^{\cdot}$ lo son). Luego, g es composición de clase $\mathcal{C}^1 \Rightarrow g$ es de clase $\mathcal{C}^1$ (1 punto)

Tenemos $J_g\,(u,v) {=} J_f(h(u,v)) {\cdot} J_h(u,v)$ donde J representa el Jacobiano de la función en un punto, es decir la matriz asociada al diferencial en dicho punto. (2 puntos)

Calculemos $J_h(u,v) = \begin{pmatrix} -\sin u & \cos v \\ \cos u & -\sin u \\ e^{u-v} & -e^{u-v} \end{pmatrix}$

Si evaluamos en $(u,v) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ obtenemos $J_h\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, además

$h\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = (1, 1, 1)$ (1.5 puntos)

Con todo lo anterior $J_g\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = J_f(1, 1, 1) \cdot J_h\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ (1.5 puntos)

Notas: Se aceptan otras formas de expresar el diferencial (como una suma de derivadas parciales, por ejemplo), lo que esta totalmente correcto mientras haya una notación coherente. Por esta misma razón, Los cálculos pudieron no haber pasado nunca por un producto de matrices.