Guía Control 2: Cálculo en Varias Variables

Profesor: Rafael Correa F.
Auxiliares: Raimundo Briceño, Adolfo Henríquez,
Gonzalo Mena & Emilio Vilches

22 de mayo, 2009

Pregunta 1

1. Demuestre que $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es lineal continua ssi $\exists A \in \mathcal{M}_{mxn}(\mathbb{R})$ tal que $T(x) = Ax$,$\forall x \in \mathbb{R}^n$

2. Pruebe que si $A \in \mathcal{M}_{mxn}(\mathbb{R})$ y definimos T como:

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ x &\longmapsto Ax \end{aligned}$$

   Entonces $DT(x)(h) = Ah$ $\forall x, h \in \mathbb{R}^n$

3. Sea $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ bilineal. Es decir $\forall x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, $\forall y, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^m$, $\forall a \in \mathbb{R}$ se tiene

$$f(ax, y) = af(x, y) = f(x, ay) \quad (1)$$

$$f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y) \quad (2)$$

$$f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2) \quad (3)$$

   Demuestre que existe una constante C tal que $\forall x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ $|f(x, y)| \leq C\,|x|\,|y|$

   *Def:*En lo sucesivo, consideremos f:$E \times F \longrightarrow G$ con E, F, G Banach. Supongamos además que f satisface las condiciones $(1), (2), (3)$ y que además existe una constante C tal que $\forall x \in E, y \in F$ $|f(x, y)| \leq C\,|x|\,|y|$ (Por ejemplo, podríamos considerar una función como la de la parte anterior). A una función con tales propiedades se le llama bilineal contínua. Se puede demostrar que la propiedad $\forall x \in E, y \in F\, |f(x, y)| \leq C\,|x|\,|y|$ equivale a la continuidad de la función f

4. Demuestre que

$$\lim_{(h.k) \to 0} \frac{|f(h, k)|}{|(h, k)|} = 0$$

5. Pruebe que $Df(a,b)(x,y) = f(a,x) + f(x,b)$

Solucion:

1. De álgebra lineal sabemos que cualquier transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ se puede representar como un producto matricial ("matriz representante de la transformación linea). Conversamente, cualquier función de la forma Ax con A matriz es lineal. Luego, sólo falta probar que todas las transformaciones de la forma $\begin{aligned} T_A : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ x &\longmapsto Ax \end{aligned}$ son continuas. Para esto demostraremos que T_A es contínua en cero cualquiera sea la matriz A. En efecto,

$$||T_A(x) - T_A(0)|| = ||Ax - A0|| = ||Ax|| = ||\sum_{j=1}^{n} A_{\bullet,j}x_j|| \leq$$
$$\sum_{j=1}^{n} ||A_{\bullet,j}x_j|| = \sum_{j=1}^{n} ||A_{\bullet,j}|| \cdot |x_j|$$

(acá $A_{\bullet,j}$ denota la columna $j - esima$ de la matriz A). como $||A_{\bullet,j}|| \leq M := \max_{j=1..n} ||A_{\bullet,j}||$ entonces

$$||T_A(x) - T_A(0)|| \leq M \sum_{j=1}^{n} |x_j| = M||x||$$

Tenemos finalmente $||T_A(x) - T_A(0)|| \leq M||x - 0||$ lo que claramente implica que T_A es continua en 0. (Nota: aca asumimos que $||x|| = ||x||_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$. Esto se puede hacer sin pérdida de generalidad porque en $\mathbb{R}^n$ todas las normas son equivalentes.

2. Resulta del hecho de que si $f : E \longrightarrow F$ (E, F Banach) es lineal continua, entonces$\forall a \in E$ $Df(a) = f$. Luego, $DT(x)(h) = T(h) = Ah$

3. La demostración es similar a la de la priemera parte. Supongamos que $h, k \neq 0$ (si alguno de los dos es nulo cualquier cota nos sirve). Tenemos:

$$f(x,y)| = |x| \cdot |f(\tfrac{x}{|x|}, y)| \leq \sup_{|h|=1} |x| \cdot |f(h,y)|| =$$
$$|x| \cdot |y| \cdot \sup_{|h|=1} |f(h, \tfrac{y}{|y|})| \leq |x| \cdot |y| \cdot \sup_{|h|=1,|k|=1} |f(h,k)|$$

Demostraremos que $\sup_{|h|=1,|k|=1} |f(h,k)|$ es finito (este número sera la constante C buscada).

En efecto, $h = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, k = \sum_{j=1}^{m} \beta_j w_j$ con $\{v_i\}_{i=1..n}$, $\{w_j\}_{j=1..m}$ bases canónicas de $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ respectivamente.

entonces:

$$|f(h,k)| = \left| f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^{m} \beta_j w_j \right) \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f\left(v_i, \sum_{i=1}^{m} \beta_j w_j \right) \right| =$$
$$\left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \beta_j \alpha_i f(v_i, w_j) \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |\beta_j| \cdot |\alpha_i| \cdot |f(v_i, w_j)|$$

Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $|h| = ||h||_\infty = \max\limits_{i=1..n} |\alpha_i|$ y que $|k| = ||k||_\infty = \max\limits_{j=1..n} |k_j|$. Así, $|\alpha_i|,|\beta_j| \leq 1 \forall i = 1..n \forall j = 1..m$. Luego

$$|f(h,k)| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |f(v_i, w_j)|$$

Y como la suma de la derecha es finita, y cada término es finito. Notar además que esa suma no depende de h, k. Si definimimos $C = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} |f(v_i, w_j)|$ tendremos:

$$|f(x,y)| \leq |x| \cdot |y| \cdot \sup_{|h|=1, |k|=1} C = C \cdot |x| \cdot |y|$$

Lo que concluye la demostración.

4. $\dfrac{|f(h,k)|}{|(h,k)|} \leq \dfrac{C \cdot |h| \cdot |k|}{|h| + |k|} = C \dfrac{1}{\frac{1}{|k|} + \frac{1}{|h|}}$ Pero si Si $h, k \to 0$ $C \dfrac{1}{\frac{1}{|k|} + \frac{1}{|h|}} \to 0$ lo que obviamente implica

$$\lim_{(h.k) \to 0} \frac{|f(h,k)|}{|(h,k)|} = 0$$

Nota: acá usamos $|(h,k)| = |h| + |k|$. También podriamos haber definido, por ejemplo $|(h,k)| = \max(|h|, |k|)$ (pues las normas en los espacios de dimensión finita son equivalentes.

5. En efecto,

$$\frac{||f(a+h, b+k) - f(a,b) - f(a,k) - f(h,b)||}{||(h,k)||} =$$
$$\frac{||f(a,b) + f(a,h) + f(b,k) + f(h,k) - f(a,b) - f(a,k) - f(h,b)||}{||(h,k)||} = \frac{||f(h,k)||}{||(h,k)||}$$

La conclusión se obtiene de la parte anterior.

Pregunta 2

Consideremos $E = (\mathcal{M}_{nxn}(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$, con $\|A\| = \sup\limits_{|x|=1} |Ax|$ (es decir, la norma de la transformación lineal asociada a la matriz) y $\begin{array}{c} f : E \longrightarrow E \\ A \longmapsto A^t A \end{array}$

1. Demuestre que $||AB|| \leq ||A|| \cdot ||B||$ y que $A \to 0$(con la norma recién definida) ssi $\forall i, j = 1..n\ a_{i,j} \to 0$(en $\mathbb{R}$, $a_{i,j} := A_{i,j}$). Concluya que $||A^t|| \leq C||A||$, para cierta constante C que no depende de A.

2. Calcule por definición $Df(A)$

3. Encuentre $Df(A)$, usando la parte 5 de la pregunta 1 y aplicando de manera apropiada la regla de la cadena .

4. Demuestre que f es contínuamente diferenciable.

Solución:

1. La primera parte se deduce de Notar de que si $\begin{array}{c} T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x \longmapsto Ax \end{array}$ entonces $T_{AB}(x) = T_A \circ T_B(x)$, que $||T_A|| = ||A||$ y que $||f \circ g|| \leq ||f|| \cdot ||g||$ si f, g son funciones lineales continuas. Para la segunda parte, demostremos primero $\Rightarrow$:
   Sabemos que $A \to 0 \Longleftrightarrow ||A|| \to 0 \Longleftrightarrow \sup\limits_{|x|=1} |Ax| \to 0$. En particular, para cualquier $v \in \mathbb{R}^n$ $||v|| = 1$, $|Av| \to 0$. Si elegimos los elementos de la base canónica obtenemos, desarrollando el producto matricial: $||A_{\bullet,i}|| \to 0$,
   $\forall i = 1..n$ Pero $A_{\bullet,i} = \begin{pmatrix} a_{1,i} \\ a_{2,i} \\ a_{3,i} \\ . \\ . \\ a_{n,i} \end{pmatrix}$. Luego, $\forall i, j = 1..n\ a_{i,j} \to 0$
   Demostremos $\Leftarrow$: Tenemos
   $$\sup_{|x|=1} |Ax| = \sup_{|x|=1} |\sum_{i=1}^{n} A_{\bullet,i} x_i| \leq \sup_{|x|=1} \sum_{i=1}^{n} ||A_{\bullet,i}|| \cdot |x_i| \leq \sup_{|x|=1} \sum_{i=1}^{n} ||A_{\bullet,i}|| \cdot 1 = \sum_{i=1}^{n} ||A_{\bullet,i}||$$
   Como todas las componentes de $A_{\bullet,i}$ se van a cero, entonces $A_{\bullet,i} \to 0$ y como esto es $\forall i = 1..n$, se tiene $\sum\limits_{i=1}^{n} ||A_{\bullet,i}|| \to 0$ lo que implica la conclusión deseada por Teorema del Sandwich.(hemos considerado la norma del máximo para x)
   Para concluir la desigualdad, demostraremos que la función $\begin{array}{c} \sigma : E \longrightarrow E \\ A \longmapsto A^t \end{array}$ es lineal continua. Notemos primero que g es claramente lineal. Para ver que es continua, probaremos que es continua en 0. Supongamos $||A|| \to 0$,

por lo recién demostrado esto sucede $\Leftrightarrow \forall i,j = 1..n\ a_{i,j} \to 0$. Si intercambiamos j,i esto equivale $\forall j,i = 1..n\ a_{j,i} \to 0$ Pero como $A^t_{i,j} = a_{j,i}$ tenemos $\forall i,j = 1..n\ A^t_{i,j} \to 0$ y ocupando nuevamente la conclusión anterior, esto equivale a $A^t = \sigma(A) \to 0$. Por lo tanto σ es continua en cero, pero como es lineal esto significa que es lineal continua, luego $\exists C = ||\sigma||$ tal que $\forall A \in E$

$$||A^t|| = ||\sigma(A)|| \leq C||A||$$

2. Debemos buscar un "candidato".
   Calculemos:

   $$f(A+h) - f(h) = (A+h)^t(A+h) - A^tA = A^tA + A^th + h^tA + h^th$$

   Proponemos como candidato a diferencial la función $\begin{array}{c} g : E \to E \\ h \longmapsto A^th + h^tA \end{array}$ veamos que efectivamente es la derivada.

   $$\frac{||f(A+h) - f(A) - g(h)||}{||h||} = \frac{||A^tA + A^th + h^tA + h^th - A^tA - A^th - h^tA||}{||h||} =$$
   $$\frac{||h^th||}{||h||} \leq \frac{||h^t|| \cdot ||h||}{||h||} = ||h^t|| \to 0 \text{ si } h \to 0.$$

   (pues la función σ definida en la parte anterior es contínua en cero). Esto concluye la demostración. (En rigor, habria que demostrar que g es lineal continua, pero esto se tiene aplicando las partes anteriores)

3. Consideremos $\begin{array}{c} g : E \longrightarrow E \times E \\ A \longmapsto (A,A) \end{array}$ y $\begin{array}{c} m : E \times E \longrightarrow E \\ (A,B) \longmapsto A^tB \end{array}$
   g es claramente lineal continua(demostrarlo, usando una norma apropiada para el producto) y como $||m(A,B)|| = ||A^tB|| \leq ||A^t|| \cdot ||B|| \leq C||A|| \cdot ||B||$ (Usando la parte 1). Concluimos por la pregunta anterior que h es bilineal continua (es decir, satisface la definición del final de la la Pregunta 1-3). Notemos ahora que $f(A) = m \circ g(A)$. Usando la regla de la cadena tenemos:
   $D_f(A)(h) = D_{(m \circ g)}(A)(h) = (D_m(g(A)) \circ D_g(A))(h) = D_m(g(A))(D_g(A)(h))$.
   Como g es lineal continua, $D_g(A)(h) = g(h)$. Por esta razón, $D_f(A)(h) = D_m(g(A))(g(h)) = D_m(A,A)(h,h)$ pero como h es bilineal continua, y por la pregunta anterior: $D_f(A)(h) = D_m(A,A)(h,h) = m(A,h) + m(h,A) = A^th + h^tA$

4. Probaremos que $\begin{array}{c} D_f : E \longrightarrow \mathcal{L}(E,E) \\ A \longrightarrow D_f(A) \end{array}$ es continua. En efecto,

   $$||Df(A) - Df(A_0)|| = \sup_{||h||=1} ||(Df(A) - Df(A_0))(h)|| = \sup_{||h||=1} ||Df(A)(h) - Df(A_0)(h)|| =$$

   $$= \sup_{||h||=1} ||A^th + h^tA - A_0^th + h^tA_0|| = \sup_{||h||=1} ||(A - A_0)^th + h^t(A - A_0)|| \leq$$

$$\sup_{||h||=1} ||(A-A_0)^t h|| + \sup_{||h||=1} ||h^t(A-A_0^t)| \leq$$

$$\sup_{||h||=1} C||(A-A_0)|| \cdot ||h|| + \sup_{||h||=1} C||h|| \cdot ||(A-A_0)||$$

Acá, nuevamente usamos el hecho de que la transposición es lineal continua(C es la norma de esa función), y que la norma del producto de matrices esta acotada por el producto de las normas. Podemos seguir acotando:

$$||Df(A) - Df(A_0)|| \leq C||(A-A_0)|| + C||(A-A_0)||$$

Luego, si $A \to A_0$, $||A - A_0|| \to 0$ Y por la desigualdad recién obtenida, $||Df(A) - Df(A_0)|| \to 0$, que es lo que queriamos probar.

Pregunta 3

Sea $P : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $P(x,y) = \langle x, y \rangle$

1. Encuentre $DP(x,y)$ y $\nabla P(x,y)$
2. Si $\eta : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ se define como $\eta(x) = \|x\|_2$ Calcule $D\eta(x)$ y $\nabla\eta(x)$
3. Si f, g:$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ son diferenciables y $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(t) = \langle f(t), g(t) \rangle$. Muestre que:
$h'(a) = \langle f'(a)^t, g(a) \rangle + \langle f(a), g'(a)^t \rangle$. Nota: Para funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow E$ diferenciables, con E Banach definimos $f'(t) = Df(t)(1)$(y coincide con la definición "usual" de $f'(t) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$)
4. si f:$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable y $|f(t)| = 1$para todo t , muestre que $\langle f'(t)^t, f(t) \rangle = 0$

Solución:

1. Se puede demostrar que Pes bilineal continua. (importante hacerlo!)Eso nos permite concluir que $\begin{array}{c} DP(x,y) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ (h,k) \longmapsto \langle h, y \rangle + \langle x, k \rangle \end{array}$ Para encontrar el gradiente, recordemos la definición de gradiente. Si $f : E \to R$ con E Hilbert, y si f es diferenciable en x_0, se define $\nabla f(x_0)$ como el único $v \in E$ tal que $Df(x_0)(h) = \langle h, v \rangle$ (la existencia y unicidad de v esta dada por el Teorema de Representación de Riesz). Por lo tanto, para encontrar $\nabla P(x,y)$ primero desarrollamos

$$DP(x,y)(h,k) = \langle h, y \rangle + \langle x, k \rangle = \sum_{i=1}^{n} h_i y_i + \sum_{i=1}^{n} x_i k_i$$

. Si definimos $v = (y, x)$ y $u = (h, k)$ tenemos:
$DP(x, y)(u) = \sum_{i=1}^{2n} v_i u_i = \langle v, u\rangle$. (obviamente, aca consideramos el producto interno en $\mathbb{R}^{2n}$). Luego $\nabla P(x, y) = (y, x)$.
Alternativamente, podemos buscar la matriz representante de $DP(x, y)$ .Tenemos que $DP(x, y)(h, k) = \langle h, y\rangle + \langle x, k\rangle = \langle x, k\rangle + \langle y, h\rangle = x^t h + y^t k = (x^t\, y^t)(h\, k)$. Pero vimos también, que $\nabla f(x_0) = J_f(x_0)^t$donde $J_f(x_0)$es el Jacobiano, o matríz representante del diferencial. Claramente $J_P(x, y) = (x^t\, y^t)$, luego

$$\nabla P(x, y) = J_P(x, y)^t = (y, x)$$

Nota: Notar la sutileza de que $(x^t\, y^t)$ es una matriz de $1x(n + m)$, Luego $(x^t y^t)^t$es una matriz de $(n+m)x1$, y escribimos (y, x)(concatenación hacia abajo de vectores) en lugar de (yx) (concatenación hacia al lado de vectores o matrices).

2. Notemos que $\eta = f \circ P \circ g$, con $\begin{array}{l} f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{array}$, P definido como antes y $\begin{array}{l} g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ x \longmapsto (x, x) \end{array}$.
Para derivar η usamos regla de la cadena: $D_\eta(x)(h) = D_{f\circ P\circ g}(x)(h) = (D_f\,(P \circ g(x)) \circ D_P(g(x)) \circ D_g(x))\,(h)$
Igual que como en la parte anterior, $D_g(x) = g$,
Luego: $(D_f\,(P \circ g(x)) \circ D_P(g(x)) \circ D_g(x))\,(h) = D_f\,(P \circ g(x))\,(D_P(g(x))\,(D_g(x)(h))) = D_f\,(P \circ g(x))\,(D_P(g(x))\,(g(h)))$
$= D_f\,(P \circ g(x))\,(D_P((x, x))\,((h, h)) = D_f\,(P \circ g(x))\,(2\,\langle x, h\rangle)$ Pero $\begin{array}{l} Df(x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ h \longmapsto \dfrac{h}{2\sqrt{x}} \end{array}$
Y como $P \circ g(x) = \langle x, x\rangle = ||x||^2$obtenemos:
$D_\eta(x)(h) = \dfrac{2\,\langle x, h\rangle}{2||x||} = \left\langle \dfrac{x}{||x||}, h\right\rangle$. Ahora que tenemos el diferencial expresado de esa forma el gradiente resulta mucho más fácil de encontrar. Por la discusión anterior (parte 1) éste es: $\nabla\eta(x) = \dfrac{x}{||x||}$.

3. Por definición $h'(a) = D_h(a)(1)$. Usaremos nuevamente la regla de la cadena. Consideremos $\begin{array}{l} m : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ t \longmapsto (f(t), g(t)) \end{array}$, diferenciable ya que es diferenciable por coordenadas. Además, $m'(t) = (f'(t), g'(t))$ (facil de demostrar, queda como ejercicio). Notemos que $h = P \circ m$. Usaremos nuevamente la regla de la cadena.

$$h'(a) = D_h(a)(1) = (D_P\,(m(a)) \circ D_m(a))\,(1) = D_P\,(m(a))\,(D_m(a)(1)) =$$

$$D_P\,((f(t), g(t))\,((f'(t), g'(t)) = \langle f(t), g'(t)\rangle + \langle f'(t), g(t)\rangle$$

4. Si consideramos h como en la parte anterior, pero tomando $g = f$ tenemos $h(t) = 2\langle f(t), f(t)\rangle = 2|f(t)|^2 = 2 = cte$. Luego $h'(t) = 0$ y por el cálculo hecho en la parte anterior, $0 = \langle f'(t), f(t)\rangle + \langle f(t), f'(t)\rangle$. Por la simetria del producto interno, y dividiendo por dos concluimos.

Pregunta 4

Una familia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones continuas definidas de $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y conexo en $\mathbb{R}^m$ se dirá equicontínua ssi

$\forall x \in \mathbb{R}^n\ \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$ si $||x-y|| \leq \delta$ entonces $\|f_n(x) - f_n(y)\| \leq \varepsilon$

Es decir, podemos elegir para cada ε un δ de manera uniforme en n. En particular, notemos que si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ equicontínua, entonces f_n es contínua $\forall n \in \mathbb{N}$.

Demuestre que si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de funciones $\mathcal{C}^1$ tales que $\exists M > 0$ tq $||Df_n(x)|| \leq M$,$\forall n \in \mathbb{N}$,$\forall x \in A$, entonces $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es equicontinua

Solución:

En efecto, por el teorema del valor medio, para todo $x, y \in A$ y para cualquier $n \in \mathbb{N}$ $\|f_n(x) - f_n(y)\| \leq \sup\limits_{z\in[x,y]} \|Df_n(z)\| \, \|x-y\| \leq M\,\|x-y\|$

Luego, dado $\varepsilon > 0$ podemos escoger $\delta = \frac{\varepsilon}{M} > 0$, de manera que si $||x-y|| \leq \delta$ entonces

$$\|f_n(x) - f_n(y)\| \leq M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

Esto, para cualquier $n \in \mathbb{N}$