

PAUTA TRABAJO DIRIGIDO 5 CVV

P1. Calcular el diferencial en el origen de las aplicaciones:

a) $f(x, y, z) = 2 + 3z + xy + z \sin(x^2 + y^2)$.

Calculamos las derivadas parciales de f para encontrar un “*candidato*” a diferencial:
Tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= y + 2xz \cos(x^2 + y^2) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= x + 2yz \cos(x^2 + y^2) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= 3 + \sin(x^2 + y^2)\end{aligned}$$

Estos cálculos se justifican en el hecho de que para $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definimos

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{t}$$

Es decir, las derivadas parciales corresponden a las derivadas “usuales” considerando constantes todas las variables, excepto x_i . Si evaluamos en $(0, 0, 0)$ obtendremos los valores de las derivadas parciales en el origen. Estos valores son:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 0) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0, 0) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 0) &= 3\end{aligned}$$

El diferencial de f en $(0, 0, 0)$ debe ser una función lineal continua de $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Sabemos que las funciones lineales continuas de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ son exactamente aquellas de la forma

$$\begin{array}{ccc} T_A: \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & A \cdot x \end{array}$$

con $A \in M_{1 \times 3}(\mathbb{R})$, donde “ $\cdot$ ” denota el producto matricial.

Proponemos como diferencial de f en $(0, 0, 0)$ la función lineal continua

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Verifiquemos que efectivamente esta función es el diferencial de f en cero. Este se tiene así:

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{\|f(h_1, h_2, h_3) - f(0, 0, 0) - g(h)\|}{\|h\|} = 0$$

$$(\text{Acá, } h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \text{ y } \|h\| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}.)$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} f(h_1, h_2, h_3) - f(0, 0, 0) - g(h) &= 2 + 3h_3 + h_1h_2 + h_3\sin(h_1^2 + h_2^2) - 2 - 3h_3 \\ &= h_1h_2 + h_3\sin(h_1^2 + h_2^2) \end{aligned}$$

y sabemos que

$$\frac{\|h_3\|\sin(h_1^2 + h_2^2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}} \leq \|h_3\| \frac{\sin(h_1^2 + h_2^2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \|h_3\| \sqrt{(h_1^2 + h_2^2)} \frac{\sin(h_1^2 + h_2^2)}{(h_1^2 + h_2^2)} (*)$$

Luego, como $h \rightarrow 0 \implies h_1 \rightarrow 0 \wedge h_2 \rightarrow 0 \implies h_1^2 + h_2^2 \rightarrow 0$, y de cálculo sabemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Entonces, si $h \rightarrow 0$, $\|h_3\| \sqrt{(h_1^2 + h_2^2)} \frac{\sin(h_1^2 + h_2^2)}{(h_1^2 + h_2^2)} \rightarrow 1 \cdot 0 = 0 \implies \frac{\|h_3\|\sin(h_1^2 + h_2^2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}} \rightarrow 0$ si $h \rightarrow 0$.

Por tanto, concluimos que $g = Df(0, 0, 0)$

Nota: Alternativamente se podría argumentar que la función f es diferenciable en cero por ser suma, producto y composición de funciones diferenciables. Del teorema (5.3.5) del apunte (pág 67), tenemos:

$$Df \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = Df \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 0) \quad (1)$$

$$Df \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0, 0) \quad (2)$$

$$Df \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 0) \quad (3)$$

Y

$$\begin{aligned} Df \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto A \cdot x \end{aligned}$$

con $A \in M_{1 \times 3}(\mathbb{R})$. Supongamos $A = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}$, así

$$(1) \iff \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 0) \iff a = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 0)$$

y análogamente, $b = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0, 0)$ y $c = \frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 0)$.

Luego, $Df \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es la función lineal cuya matriz representante es

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 0) & \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0, 0) & \frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 0) \end{pmatrix} = (0, 0, 3).$$

b) $g(x, y) = 1 + x\sqrt{y^2 + 2}$

Por álgebra de funciones diferenciables, g es diferenciable en cero. Calculamos primero las derivadas parciales:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \sqrt{y^2 + 2} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = \sqrt{2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{2xy}{2\sqrt{y^2 + 2}} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) = 0$$

Luego,

$$Dg \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \quad \mathbb{R}^2 \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}$$

$$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \quad \longmapsto \quad \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

Propuesto: Tratar de hacerlo con el “candidato”.

P2. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin(xy)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a) Muestre que f es diferenciable en todo punto $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.

Notemos que la función $g(x, y) = x \sin(xy)$ es diferenciable $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, la función $h(x, y) = x^2 + y^2$ es diferenciable $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, y la función $m(x) = \frac{1}{x}$ es diferenciable ssi. $x \neq 0$.

Luego, $f_1(x, y) = g(x, y) \cdot m \circ h(x, y)$ es diferenciable ssi $h(x, y) \neq 0$.

Pero $h(x, y) \neq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \neq 0 \Leftrightarrow (x, y) \neq (0, 0)$. Luego, si $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, f_1 es diferenciable en (x_0, y_0) , pero si $(x_0, y_0) = (0, 0)$, entonces $f_1(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)$.

Por lo tanto, si $(x_0, y_0) \neq 0$, entonces f es diferenciable en (x_0, y_0) .

b) Muestre que f es continua en $(0,0)$

Sabemos que:

$$\frac{xs\sin(xy)}{x^2+y^2} = \frac{x(xy)}{x^2+y^2} \cdot \frac{\sin(xy)}{xy} = \frac{x^2y}{x^2+y^2} \cdot \frac{\sin(xy)}{xy}.$$

Y además, tenemos que

$$\frac{x^2y}{x^2+y^2} \leq \frac{x^2|y|}{x^2+y^2} \leq \frac{x^2|y|+|y|y^2}{x^2+y^2} \leq \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}|y| = |y|$$

Por tanto, si $(x, y) \rightarrow 0$, $(x, y) \neq 0$, entonces $\frac{x^2y}{x^2+y^2} \cdot \frac{\sin(xy)}{xy} \rightarrow 0 \cdot 1 = 0 = f(0,0)$, con lo que se demuestra que f es continua en 0.

c) Calcule (cuando existan) las derivadas direccionales

$$Df((0,0);(d_1,d_2)), \text{ con } (d_1,d_2) \neq (0,0).$$

Debemos calcular

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(td_1, td_2) - f(0,0)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{td_1 \sin(t^2 d_1 d_2)}{t^2(d_1^2 + d_2^2) \cdot t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{td_1(d_1 d_2)}{t(d_1^2 + d_2^2)} \cdot \frac{\sin(t^2 d_1 d_2)}{t^2 d_1 d_2} \end{aligned}$$

$$\text{Definamos } A(t) = \frac{td_1(d_1 d_2)}{t(d_1^2 + d_2^2)}, \text{ y } B(t) = \frac{\sin(t^2 d_1 d_2)}{t^2 d_1 d_2}.$$

Vemos entonces que si $t \rightarrow 0$, $B(t) \rightarrow 1$, luego $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(td_1, td_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} A(t) = \frac{d_1(d_1 d_2)}{(d_1^2 + d_2^2)}$, con lo que se concluye que

$$Df((0,0);(d_1,d_2)) = \frac{d_1^2 d_2}{(d_1^2 + d_2^2)}$$

d) Determine si f es diferenciable en $(0,0)$

Si f fuera diferenciable en $(0,0)$ entonces el diferencial $Df(0,0)$, debería tener como matriz representante $\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \end{bmatrix}$

Pero

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = Df((0,0);(1,0)) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = Df((0,0);(0,1)) = 0$$

Luego

$$Df \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$h \longmapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0$$

sería el diferencial, y tendríamos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(h_1, h_2) - f(0, 0) - Df \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}|}{\|h\|} = 0 \Leftrightarrow \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow 0} \frac{h_1 \sin(h_1 h_2)}{(h_1^2 + h_2^2) \cdot \sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0$$

Pero esto es ridículo, porque podemos tomar $h_1 = \frac{1}{n}$, $h_2 = \frac{1}{n}$, $(h_1, h_2) \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$, y

$$\frac{|h_1 \sin(h_1 h_2)|}{(h_1^2 + h_2^2) \sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \frac{\frac{1}{n} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^3} 2\sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n} 2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}$$

$$\text{y } \frac{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} \rightarrow 1 \text{ si } n \rightarrow \infty$$

Luego

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|f(h_1, h_2) - f(0, 0) - Df \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}|}{\|h\|}$$

no puede ser cero (pues existe una forma de aproximarse a cero, i.e. una sucesión donde el límite es positivo), por lo tanto, f no puede ser diferenciable en $(0, 0)$

P3. Escribir la matriz jacobiana de las aplicaciones siguientes:

$$a) f(x, y, z) = (\sin(xyz), x + e^z, y + z)$$

Calculamos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = (yz \cos(xyz), 1, 0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = (xz \cos(xyz), 0, 1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = (xy \cos(xyz), e^z, 1)$$

Luego,

$$J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz \cos(xyz) & xz \cos(xyz) & xy \cos(xyz) \\ 1 & 0 & e^z \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b)f(x, y, z) = e^{xy}(\cos(z), \sin(y), e^x)$$

Calculamos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = (ye^{xy}\cos(z), ye^{xy}\sin(y), e^x e^{xy} + e^{xy}e^x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = (xe^{xy}\cos(z), xe^{xy}\sin(y) + e^{xy}\cos(y), e^x xe^{xy})$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = (-e^{xy}\sin(z), 0, 0)$$

Luego,

$$J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} ye^{xy}\cos(z) & xe^{xy}\cos(z) & -e^{xy}\sin(z) \\ ye^{xy}\sin(y) & xe^{xy}\sin(y) + e^{xy}\cos(y) & 0 \\ e^x e^{xy} + ye^{xy}e^x & xe^x e^{xy} & 0 \end{pmatrix}$$

P4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a) Estudie la continuidad de f .

Si $(x, y) \neq (0, 0)$, f claramente es continua. Sea $(x, y) \neq (0, 0)$, tendremos

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \leq x^2 + y^2$$

Luego, cuando $(x, y) \longrightarrow 0$, y $(x, y) \neq (0, 0) \Rightarrow f(x, y) \longrightarrow 0$. Por lo tanto, f es continua $\forall (x, y)$.

b) Calcule $\nabla f(0, 0)$.

Calculamos primero las derivadas parciales,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} t^2 \sin\left(\frac{1}{|t|}\right) \leq \lim_{t \rightarrow 0} t^2 = 0$$

Luego $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$. Análogamente obtenemos que $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, por lo tanto,

$$\nabla f(0, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) Probar que f es diferenciable en $(0, 0)$.

Nuestro candidato a diferencial será

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$h \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0$$

Calculemos ahora

$$\lim_{\substack{(h_1, h_2) \rightarrow 0 \\ (h_1, h_2) \neq 0}} \frac{\|f(h_1, h_2) - f(0, 0) - g \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}\|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \lim_{\substack{(h_1, h_2) \rightarrow 0 \\ (h_1, h_2) \neq 0}} \frac{((h_1 + h_2^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}\right))}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$$

$$= \lim_{\substack{(h_1, h_2) \rightarrow 0 \\ (h_1, h_2) \neq 0}} \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}\right) \leq \lim_{\substack{(h_1, h_2) \rightarrow 0 \\ (h_1, h_2) \neq 0}} \sqrt{h_1^2 + h_2^2} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{(h_1, h_2) \rightarrow 0 \\ (h_1, h_2) \neq 0}} \frac{\|f(h_1, h_2) - f(0, 0) - g \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}\|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0 \text{ . Lo que implica que } f \text{ es diferenciable en } (0, 0).$$

d) Probar que $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ no son continuas en $(0, 0)$.

Probaremos que $\frac{\partial f}{\partial x}$ no es continua en $(0, 0)$, el otro caso es análogo.

Si $(x, y) \neq (0, 0)$, calculamos $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ de la manera usual. Tenemos entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (x^2 + y^2) \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \frac{-1 \cdot 2x}{2(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

y sabemos que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$. Consideremos $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = 0$. Luego,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) = \frac{1}{n^2} \cos(n) \cdot \frac{-1}{n} n^3 + \frac{2}{n} \sin(n)$$

Si $n \rightarrow \infty$, $\frac{2}{n} \rightarrow 0$; $\sin(n) \leq 1 \Rightarrow \frac{2}{n} \sin(n) \rightarrow 0$, y $\frac{1}{n^2} \cos(n) \cdot \frac{-1}{n} n^3 = -\cos(n)$, que no converge.

Luego, $\frac{\partial f}{\partial x}$ no puede ser continuo en cero, pues si lo fuera se debería tener que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$, para cualquier (x_n, y_n) .