Auxiliar nº7 Cálculo en Varias Variables: La maratón

Profesor: Rafael Correa F.
Auxiliares: Raimundo Briceño, Adolfo Henríquez, Gonzalo Mena & Emilio Vilches

22 de abril, 2009

Pregunta 1 (*Series de Neumann*)

Sea $A \in \mathcal{L}(E, E)$, E Banach. y $||A|| < 1$

1. Demuestre que si $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(E, E)$ Entonces $L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}(E, E)$ y $\|L_1 \circ L_2\| \leq \|L_1\| \, \|L_2\|$
2. Demuestre que $\forall x \in E \lim\limits_{n\to\infty} A^n(x) = 0$
3. Demuestre que el operador $\overline{A}$ definido en cada punto como $\overline{A}(x) := \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} A^k(x)$ esta bien definido y $\overline{A} \in \mathcal{L}(E, E)$. (Acá $A^0 = I$, el operador identidad en E). Pruebe además que $\left\|\overline{A}\right\| \leq \dfrac{1}{1 - \|A\|}$
4. Pruebe que el operador $(I - A)$ es invertible, $(I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(E, E)$ y que $(I - A)^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$ (es decir, $\forall x \in E$ $(I - A)^{-1}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} A^k(x)$)
5. Sea $y \in E$ fijo. Demuestre usando el teorema del punto fijo de Banach que la ecuación:
$$x - Ax = y$$
Posee solución única en E

Pregunta 2

Sea H un Hilbert. Sea M s.e.v cerrado de H (Suponemos $M \neq \{0\}$) Consideremos $P : H \longrightarrow H$ tal que $P(x) = z$ donde z es la proyección de x sobre M, es decir $z \in M$ y es el único que satisface la condición

$$< z - x, m >= 0 \quad \forall m \in M$$

1. Demuestre que $P \circ P = P$ y que $< P(x), y >=< x, P(y) > \ \forall x, y \in H$
2. Demuestre que $P \in \mathcal{L}(H, H)$ y que $\|P\| = 1$
3. Recíprocamente: Sea $P : H \longrightarrow H$ lineal continua tal que $P \circ P = P$ y $< P(x), y >=< x, P(y) > \forall x, y \in H$. Muestre que P es el proyector sobre el espacio $M = Im(P)$

Pregunta 3

Sea X un e.v.n. $L : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma lineal no nula y sea $H = \{x \in X |\, L(x) = 0\}$ su núcleo.

1. Demuestre que $\forall a \in X\ H = M_a$ con $M_a = \{y + a \,|\, y \in X,\ L(y) = -L(a)\}$
2. Demuestre que $\forall a \in X \setminus H,\ N_a = \{y \in X \setminus \{0\} |\, L(y) = -L(a)\}$ es igual al conjunto $P_a = \left\{ y = \dfrac{-L(a)x}{L(x)} \mid x \in X, \|x\| = 1, L(x) \neq 0 \right\}$
3. Mostrar que si L es continua, entonces H es un s.e.v. cerrado de X. Establecer la relación.
$$dist(a, H) = \frac{|L(a)|}{\|L\|}\ \forall a \in X$$
4. Recíprocamente, supongamos que H es cerrado. Demostrar entonces que $dist(a, H) > 0$ para $a \in X \setminus H$ y deducir que L es contínua de norma $\|L\| = \dfrac{|L(a)|}{d(a, H)}$

Pregunta 4

1. Sea A el conjunto de las funciones continuas en el intervalo $[0, 1]$ tales que que $f(x) \leq 0\ \forall x \in [0, 1]$. Dotando $\mathcal{C}([0, 1])$ con la norma $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$. Calcule el interior de A
2. Sea f una función continua y biyectiva, de un compacto A de un e.v.n. E en un conjunto B de un e.v.n. F. Demuestre que $f^{-1}\ : B \longrightarrow A$ es contínua