Trabajo Dirigido 4: Cálculo en Varias Variables

Profesor : Rafael Correa
Auxiliares : R. Briceño, A. Henriquez, G.Mena y E. Vilches

15 de Abril de 2009

P1. (*Ecuación Integral de Fredholm*)
Sean $y \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R})$ y $k \in \mathcal{C}\left([a,b] \times [a,b];\mathbb{R}\right)$ dos funciones continuas. Nos proponemos resolver la ecuación (integral de Fredholm) siguiente:

$$x(s) - \int_a^b k(s,t)x(t)dt = y(s) \quad \text{para } s \in [a,b] \tag{1}$$

donde la incognita es la función $x \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R})$. Para hacer esto supondremos que el "núcleo"k satisface la siguiente condición:

$$\max_{a \le s,t \le b} |k(s,t)| < \frac{1}{b-a}$$

a) Consideremos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} A\colon & \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}) \\ & x & \mapsto & Ax \end{array}$$

donde

$$(Ax)(s) := \int_a^b k(s,t)x(t)dt + y(s)$$

Notar que (1) equivale a $Ax = x$ y así buscamos entonces un punto fijo de la aplicación A.

1) Muestre que A es un operador contratante, esto es:

$$\text{existe } L < 1 \text{ tal que } \forall x, y \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}) \quad \|Ax - Ay\|_\infty \le L\|x-y\|_\infty$$

2) Justifique que A es continuo.
3) Deducir que existe un único punto fijo $x \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R})$.
4) Considere la sucesión $\psi_n = A^n x_0$, con $x_0 \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R})$. Muestre que ψ_n converge uniformemente hacia el punto fijo x.
Indicación: Muestre que

$$\|\psi_n - x\|_\infty \le L^n \|x_0 - x\|_\infty$$

P2. (*Criterio M Weierstrass.*)
Sea (f_n) una sucesión de funciones en $C(X,Y)$, donde $(Y, \|\cdot\|_Y)$ es un espacio de Banach. Si existe una sucesión (M_n) de números no negativos tale que $\|f_n(x)\|_Y \le M_n$, para todo $x \in X$, y la serie $\sum M_n$ converge, probaremos que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

converge uniformemente en $C(X,Y)$.

a) Demuestre que $S_N(x) := \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$ es de Cauchy para todo x y por lo tanto para cada $x \in X$ existe $S(x)$ tal que $S_N(x) \to S(x)$ cuando $N \to \infty$.

b) Demuestre que $S_N(x)$ converge uniformemente a $S(x)$.

P3. (*Teorema de Von Neumann*)
Sea $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n real. Se dice que la norma de E proviene de un producto escalar si existe una función bilineal

$$< \cdot, \cdot >: E \times E \to \mathbb{R}$$

tal que

$$\|x\|^2 =< x, x >$$

a) Demuestre que si $\|\cdot\|$ proviene de un producto interno, entonces satisface la identidad del paralelogramo, esto es;

$$\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad \forall x, y \in E \tag{2}$$

b) Ahora probaremos la recíproca, es decir si $\|\cdot\|$ satisface (2), entonces proviene de un producto interno. Para ello suponga que se tiene (2) y considere

$$< x, y >= \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right) \quad \forall x, y \in E.$$

1) Reemplazando en (2) por $y \pm z$, mostrar que

$$< x + y, z > + < x - y, z >= 2 < x, z > \quad \forall x, y, z \in E. \tag{3}$$

y deducir que $< 2x, z >= 2 < x, z >$.

2) Poniendo $x + y = p$, $x - y = q$ en (3) obtener:

$$< p, z > + < q, z >=< p + q, z > \quad \forall p, q, z \in E.$$

3) Utilizando la continuidad de $E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$, mostrar que la aplicación $E \times E \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto < x, y >$ es bilineal, y concluir.