

PAUTA EJERCICIO 1: CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES

PROFESOR : RAFAEL CORREA

AUXILIARES : R. BRICEÑO, A. HENRIQUEZ, G.MENA Y E. VILCHES

14 DE ABRIL DE 2009

P1. Sea E el espacio vectorial de los polinomios reales (de grado n cualquiera). Dado el polinomio $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ definimos

$$\|P\| = \sup_{k=0, \dots, n} |a_k|$$

Definamos también la función

$$\begin{aligned} I: E &\rightarrow E \\ P &\mapsto I(P) \end{aligned}$$

$$\text{donde } I(P)(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} a_k x^k$$

y la función

$$\begin{aligned} D: E &\rightarrow E \\ P &\mapsto D(P) \end{aligned}$$

$$\text{donde } D(P)(x) = \sum_{k=1}^n k a_k x^k$$

- Muestre que $\|\cdot\|$ define una norma sobre E , demuestre también que I y D definen dos aplicaciones lineales de E en E .
- Considere $P_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k$, calcule $\|P_n\|$.
- Muestre que I es continua y que D no es continuo.
- Calcule $\|I\|_{\mathcal{L}(E;E)}$.

Solución

- a) $\|\cdot\|$ es norma:

Sean $P, Q \in E$ tales que $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ y $Q(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k$, entonces

$$1) \quad \|\lambda P\| = \sup_{k=0, \dots, n} |\lambda a_k| = |\lambda| \sup_{k=0, \dots, n} |a_k| = |\lambda| \|P\|.$$

$$2) \quad \|P\| = 0 \Leftrightarrow \sup_{k=0, \dots, n} |a_k| = 0 \Leftrightarrow a_k = 0 \quad \forall k = 0, \dots, n \Leftrightarrow P = 0.$$

- 3) Supongamos sin pérdida de generalidad que $m > n$ y definimos $a_k = 0$ para $k = n+1, \dots, m$ con esto

$$|a_k + b_k| \leq |a_k| + |b_k| \leq \sup_{k=0, \dots, m} |a_k| + \sup_{k=0, \dots, m} |b_k| = \|P\| + \|Q\|$$

tomando supremo

$$\sup_{k=0, \dots, m} |a_k + b_k| \leq \|P\| + \|Q\|$$

es decir

$$\|P + Q\| \leq \|P\| + \|Q\|$$

Linealidad:

Sean $P, Q \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$I(P + \lambda Q) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} (a_k + \lambda b_k) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} a_k + \lambda \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} b_k = I(P) + \lambda I(Q)$$

análogamente

$$D(P + \lambda Q) = \sum_{k=1}^m k (a_k + \lambda b_k) = \sum_{k=1}^m k a_k + \lambda \sum_{k=1}^m k b_k = D(P) + \lambda D(Q)$$

b) $P_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k$, luego $\|P_n\| = \sup_{k=0, \dots, n} |1| = 1$.

c) I es continua: Como I es lineal, basta con demostrar que existe un $M > 0$ tal que

$$\|I(P)\| \leq M \|x\| \quad \forall P \in E. \quad (1)$$

En efecto, Sea $P \in E$ tal que $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ entonces

$$\|I(P)\| = \sup_{k=1, \dots, n} \left| \frac{1}{k} a_k \right| \leq \sup_{k=1, \dots, n} |a_k| \leq \|P\|$$

es decir

$$\|I(P)\| \leq \|P\| \quad (2)$$

luego basta tomar $M = 1$ en (1).

D no es continua: Basta mostrar que (1) no se cumple para ningún M . Por contradicción supongamos que existe $M > 0$ tal que

$$\|D(P)\| \leq M \|x\| \quad \forall P \in E. \quad (3)$$

Usando la parte (b) con $P_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k$ tenemos que $\|P_n\| = 1$ y además

$$\|D(P_n)\| = \sup_{k=1, \dots, n} k = n$$

como n es cualquiera, podemos tomar n suficientemente grande para que (3) no se cumple, por lo tanto D no es continua.

d)

$$\|I\|_{\mathcal{L}(E;E)} = \sup_{P \neq 0} \frac{\|I(P)\|}{\|P\|} \quad (4)$$

Usando (2) se tiene que

$$\frac{\|I(P)\|}{\|P\|} \leq 1 \quad \forall P \neq 0$$

tomando $\sup_{P \neq 0}$ se obtiene que $\|I\|_{\mathcal{L}(E;E)} \leq 1$. Probemos que el supremo en (4) es

alcanzado por algún polinomio y así $\|I\|_{\mathcal{L}(E;E)} = 1$.

Sea $P(x) = x$, se tiene que $\|P\| = 1$ y $\|I(P)\| = 1$, es decir el supremo en (4) es alcanzado.

P2. Considere el espacio vectorial

$$E = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}; \mathbb{R}) ; (1+x^2)|f(x)| \text{ es acotada en } \mathbb{R}\}.$$

Para $f \in E$ consideramos $N(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (1+x^2)|f(x)|$ y la aplicación

$$\begin{aligned} L: E &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto L(f) \end{aligned}$$

donde $L(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx$.

- Muestre que N es una norma sobre E .
- Considere la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, calcule $L(f)$.
- Demuestre que L es lineal y continua con respecto a la norma N .
- Calcule $\|L\|_{\mathcal{L}(E; \mathbb{R})}$.

Solución:

- 1) Sea $f \in E$, entonces $N(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (1+x^2)|f(x)| < +\infty$ y por lo tanto $N(f)$ está bien definida para todo $f \in E$.
- $N(\lambda f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (1+x^2)|\lambda f(x)| = |\lambda| \sup_{x \in \mathbb{R}} (1+x^2)|f(x)| = |\lambda|N(f)$.
- $N(f) = 0 \Leftrightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}} (1+x^2)|f(x)| = 0 \Leftrightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
- Sean $f, g \in E$. Sea $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$(1+x^2)|f(x) + g(x)| \leq (1+x^2)|f(x)| + (1+x^2)|g(x)| \leq N(f) + N(g)$$

por lo tanto

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (1+x^2)|f(x) + g(x)| \leq N(f) + N(g)$$

de donde

$$N(f+g) \leq N(f) + N(g)$$

b)

$$L(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \pi$$

c) Linealidad:

Sean $f, g \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $L(f), L(g) < +\infty$ y por lo tanto

$$L(f + \lambda g) = \int_{-\infty}^{\infty} (f(x) + \lambda g(x)) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = L(f) + \lambda L(g)$$

Continuidad: Como L es lineal basta con demostrar que existe $M > 0$ tal que

$$L(f) \leq MN(f) \quad \forall f \in E.$$

en efecto: Sea $f \in E$, entonces

$$L(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x^2}{1+x^2} f(x) dx$$

pero como $f \in E$ se tiene que $(1+x^2)f(x)$ es acotado en $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (1+x^2)|f(x)| \leq N(f)$$

luego

$$\frac{1+x^2}{1+x^2}f(x) \leq \frac{N(f)}{1+x^2}$$

integrando

$$L(f) \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \right) N(f) = \pi N(f)$$

por lo tanto

$$L(f) \leq \pi N(f) \quad \forall f \in E \tag{5}$$

es decir L es un operador lineal continuo de E en E .

d) Usando (5) se tiene que

$$\|L\|_{\mathcal{L}(E;\mathbb{R})} \leq \pi \quad \forall f \neq 0$$

ahora usando la parte (b) sabemos que $L(f) = \pi$ para $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ y

$$N(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (1+x^2) \frac{1}{1+x^2} = 1$$

es decir $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ satisface (5) con igualdad, de donde se concluye que

$$\|L\|_{\mathcal{L}(E;\mathbb{R})} = \pi$$