Trabajo Dirigido 3: Cálculo en Varias Variables

Profesor : Rafael Correa
Auxiliares : R. Briceño, A. Henriquez, G.Mena y E. Vilches

7 de Abril de 2009

P1. Sea $\mathcal{C}[0,1]$ el espacio vectorial de las funciones continuas de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$, dotado de la norma

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$$

Considere la función

$$\begin{array}{rccl} h\colon & \mathcal{C}[0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & h(f) = \int_0^1 g(x)\cdot f(x)dx \end{array}$$

donde $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ es una función continua fija. Demuestre que h es una aplicación lineal y continua de $\mathcal{C}[0,1]$ en $\mathbb{R}$.

P2. Sea c el espacio de sucesiones reales convergentes y c_0 el espacio de las sucesiones reales convergentes a 0.
Se considera la aplicación

$$\begin{array}{rccl} N_\infty\colon & c & \to & \mathbb{R} \\ & x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & N_\infty(x) = \sup\{x_n\colon n \in \mathbb{N}\} \end{array}$$

y la aplicación

$$\begin{array}{rccl} \ell\colon & c & \to & \mathbb{R} \\ & x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & \ell(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \end{array}$$

a) Muestre que N_∞ y ℓ están bien definidas.

b) Muestre que N_∞ es norma.

c) Mostrar que ℓ es una aplicación lineal continua de c en $\mathbb{R}$.

d) Demuestre que c_0 es cerrado sobre c.

e) Calcule $\|\ell\|$.

P3. Sean E y F e.v.n reales y $\ell\colon E \to F$ una función lineal y acotada sobre la bola unitaria de E. Muestre que ℓ es continua.

P4. Sean E y F e.v.n reales y $f\colon E \to F$ una función acotada sobre la bola unitaria de E, verificando

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in E.$$

Muestre que f es lineal continua, para ello siga el siguiente esquema:

a) Pruebe que $f(0) = 0$.

b) Pruebe que $f(x) = -f(-x)$ para todo $x \in E$.

c) Pruebe que $f(qx) = qf(x)$ para todo $x \in E$, $r \in \mathbb{Q}$

d) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, Demuestre que $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ y concluya.
Indicación: Muestre que $f(x) - f(y) \leq f(x-y)$.