Auxiliar nº4: Cálculo en Varias Variables

Profesor: Rafael Correa F.
Auxiliares: Raimundo Briceño, Adolfo Henríquez,
Gonzalo Mena & Emilio Vilches

7 de abril, 2009

Pregunta 1

Demuestre que si $\{f_k\}$es una sucesión de funciones en $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ uniformemente convergente a una función f ,entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_k \int_a^b f_k(x)dx$$

Pregunta 2

Sea $\overrightarrow{E}$ un e.v.n. Sea $f : \overrightarrow{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifica la siguiente propiedad:
$\forall x \in \overrightarrow{E}$, $\forall \{x_n\} \subseteq \overrightarrow{E}$ tal que $x_n \longrightarrow x$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ existe (eventualmente es infinito) y $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \geq f(x)$

1. Sea $K \subseteq \overrightarrow{E}$ un compacto. Demuestre que $f(K)$ es un conjunto acotado inferiormente. Concluya que f alcanza su mínimo en K
2. Suponga que $E = \mathbb{R}^n$ y además que $\lim\limits_{||x||\to\infty} f(x) = \infty$. Muestre que f alcanza su mínimo en $\mathbb{R}$

Pregunta 3

Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua. Se dirá propia si para todo compacto $K \subseteq \mathbb{R}^n$ se tiene $f^{-1}(K)$ es compacto.

1. Mostrar que si f es propia entonces es cerrada, i.e. para todo cerrado $F \subseteq \mathbb{R}^n$ se tiene $f(F)$ es cerrado
2. Demuestre la siguiente equivalencia:

$$f \text{ es propia} \iff \lim_{||x||\to\infty} ||f(x)|| = \infty$$