Auxiliar 3: Cálculo en Varias Variables

Profesor : Rafael Correa
Auxiliares : R. Briceño, A. Henriquez, G.Mena y E. Vilches

31 de Marzo de 2008

Teorema: Una función lineal ℓ de un e.v.n. $(E, \|\cdot\|_E)$ en un e.v.n $(E, \|\cdot\|_E)$ es continua si y sólo si existe una constante $M > 0$ tal que

$$\|\ell(x)\|_F \leq M\|x\|_E \quad \forall x \in E.$$

P1. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n.
Definición: Sea $x \in E$ y $A \subseteq E$, se define la distancia del punto x al conjunto A como

$$d(x, A) = \inf_{z\in A} \|z - x\|$$

Definición: Se dice que un e.v.n. es **normal** si

$$\forall A, B \text{ cerrados } A \cap B = \phi \quad \text{existen } U, V \text{ abiertos tales que } A \subseteq U, B \subseteq V \text{ y } V \cap U = \phi.$$

demostraremos que todo e.v.n. es normal.

a) Demuestre que $x \in \bar{A} \Leftrightarrow d(x, A) = 0$.

b) Demuestre que la función $d(\cdot, A)\colon E \to \mathbb{R}^+$ es continua.

c) Sean A, B cerrados tales que $A \cap B = \phi$. Demostrar que E es normal, para ello siga el siguiente esquema:
Sea

$$\begin{array}{rccl} \phi\colon & E & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \phi(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)} \end{array}$$

1) Muestre que ϕ está bien definida.
2) Muestre que ϕ es continua.
3) Concluya.
Indicación: Considere $\phi^{-1}\left((-\infty, \frac{1}{2})\right)$ y $\phi^{-1}\left((\frac{1}{2}, \infty)\right)$.

P2. Sea $\mathbb{R}[X]$ el espacio de los polinomios reales. Se considera la aplicación:

$$N_\infty\colon \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ P = \sum_{i=0}^{q} a_i X^i & \mapsto & \sup_{0\leq i\leq q} |a_i| \end{array} \right.$$

y la aplicación

$$\phi\colon \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(1) \end{array} \right.$$

a) Mostrar que N_∞ define una norma sobre E.

b) Mostrar que ϕ es lineal.

c) Se considera la familia de polinomios $P_n(X) = 1 + X + X^2 + \cdots + X^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Calcular $N_\infty(P_n)$ y $\phi(P_n)$.

d) Deducir que ϕ no es continua si se considera en E la norma N_∞.

e) Sea $p \in \mathbb{N}$ fijo. Se considera el subespacio vectorial $F = \mathbb{R}_p[X]$ de E de los polinomios de grado menor o igual a p. Se dota a F de la norma N_∞ y se considera $\phi|_F$ la restricción de ϕ a F:

$$\phi|_F\colon \left\{ \begin{array}{ccc} F & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(1) \end{array} \right.$$

Mostrar que $\phi|_P$ es continua.

P3. *a*) Considere la aplicación $I\colon C[0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$I(f) = \int_0^1 f(t)dt$$

donde

$$C[0,1] = \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R} \text{ tal que } f \text{ es continua}\},$$

dotado de la norma $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$.

1) Muestre que $\|f\|_\infty$ es norma.
2) Muestre que I es lineal.
3) Muestre que I es continua.

b) Sea el operador $D\colon C^1[0,1] \to C[0,1]$ definido por $D(f) = f'$, donde

$$C^1[0,1] = \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R} \text{ tal que } f' \text{ es continua}\},$$

dotado de la norma $\|f\|_1 = \|f'\|_\infty + |f(0)|$

1) Muestre que $\|f\|_1$ es norma.
2) Muestre que D es lineal.
3) Muestre que D es continuo.
4) Si se considera $C^1[0,1]$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$, ¿es D un operador continuo ?. *Indicación:* Considere la sucesión de funciones $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(n^2\pi x)$.