Resolución problema 3 de la auxiliar nº2

March 26, 2009

Pregunta 3

Sea $\left(\overrightarrow{E}, ||\cdot||\right)$ un e.v.n.

1. Considere una sucesión $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Definimos el conjunto $C_n \subseteq \overrightarrow{E}$ como:
$$C_n = \{\vec{x}_k : \ k \geq n\}$$
Denotemos por C al conjunto de todos los puntos de acumulación de la sucesión $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Demuestre entonces que
$$C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{C_n}$$
Demostración: Debemos demostrar una igualdad de conjuntos; como siempre lo haremos demostrando ambas inclusiones.
$\subseteq$: Sea $x \in C$, i.e., x es punto de acumulación de la sucesión $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Debemos probar que $\forall n \in \mathbb{N} \ x \in \overline{C_n}$, pero recordando la definición de adherencia esto último equivale a decir $\forall n \in \mathbb{N}\, \forall \epsilon > 0\, B(x,\epsilon) \cap C_n \neq \emptyset$.
Como x es punto de acumulación, existe $(\vec{x}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ subsucesión de la original tal que $x_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} x$.
Esto significa que $\forall \epsilon > 0 \ \exists k_0(\epsilon) \ \forall k \geq k_0 \ ||x_{n_k} - x|| \leq \epsilon$. Luego, dados $n \in \mathbb{N} \wedge \epsilon > 0$ arbitrarios, consideramos x_{n_k}con $n_k > n \wedge k \geq k_0(\epsilon)$ (es claro que siempre podemos encontrar el k que cumpla ambas condiciones(¿Por qué?). Se tiene que $x_{n_k} \in B(x,\epsilon)$ por la convergencia de la subsucesión, y como $n_k > n$ se cumple que $x_{n_k} \in C_n$. Luego, $B(x,\epsilon) \cap C_n \neq \emptyset$ y esto $\forall n \in \mathbb{N}\, \forall \epsilon > 0$,lo que concluye la demostración de la primera inclusión.
$\supseteq$: Sea $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{C_n}$. Debemos probar que x es punto de acumulación de la sucesión $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$, esto quiere decir que existe una subsucesión de dicha sucesión que converge a x. Construiremos dicha subsucesión y demostraremos que converge. En efecto, sabemos que $x \in \overline{C_k} \ \forall k \in \mathbb{N}$. En otras palabras, $\forall k \in \mathbb{N}\, \forall \epsilon > 0\, B(x,\epsilon) \cap C_k \neq \emptyset$.
Consideremos $k \in \mathbb{N}, \epsilon = \frac{1}{k}$. Entonces $B\left(x, \frac{1}{k}\right) \cap C_k \neq \emptyset$ .Llamemos $n_k = min\left\{m \in \mathbb{N} : \ x_m \in C_k, \ ||x_m - x|| \leq \frac{1}{k}\right\}$

Tal número existe pues $B\left(x, \frac{1}{k}\right) \cap C_k \neq \emptyset$. Luego, $||x_{n_k} - x|| \leq \frac{1}{k}\ \forall k \in \mathbb{N}$ (por definición de n_k). Consideremos $(\vec{x}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ con los n_k recién definidos. Demostremos que esta subsucesión converge. En efecto, sea $\epsilon > 0$. Sabemos (por propiedad arquimediana, ver primer año) que $\exists k_0$ tal que $\frac{1}{k_0} \leq \epsilon$. Entonces, $\forall k \geq k_0$ se tiene:

$$||x_{n_k} - x|| \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{k_0} \leq \epsilon$$

lo que concluye la demostración.
Notas:
(a) Es un problema difícil, sobre todo la segunda inclusión. Traten de entender el rol de los cuantificadores y cómo se usan para llegar a la conclusión.
(b) La razón de por qué n_k se elige de esta manera es porque lo que vamos haciendo es que para cada k, escogemos un elemento en $B\left(x, \frac{1}{k}\right) \cap C_k$,que por hipótesis sabemos es distinto de vacio. En teoría podríamos elegir muchos elementos en esa intersección, pero nos aseguramos de elegirlos de tal forma que lo que obtengamos sea una subsucesión de la sucesión original. Recordemos que los elementos de $C_k$son términos de la sucesión, entonces lo que hacemos es escoger uno de esos términos y lo llamamos x_{n_k}.El hecho de que además ese término esté en $B\left(x, \frac{1}{k}\right)$ va a ser clave para probar la convergencia de la subsucesión escogida). El problema está en que si queremos que un subconjunto de una sucesión sea realmente una sucesión, los términos deben presentarse en el mismo orden que en la sucesión original. En otras palabras, n_k debe ser una función creciente en k , de lo contario podriamos estar "retrocediendo". El tomar n_k como un mínimo permite no tener que preocuparse de eso. (¿Por qué?).

2. Sea $K \subseteq \overrightarrow{E}$ un conjunto cerrado que verifica la propiedad p:"Para toda Familia $\{F_n\}_{n\geq 1}$de subconjuntos cerrados de K (es decir $F_n \subseteq K$, F_n cerrado $\forall n \in \mathbb{N}$) encajonados ($F_n \supseteq F_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$) y no vacíos ($F_n \neq \emptyset\ \forall n \geq 1$) se tiene que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$". Demuestre que el conjunto K es compacto.
   Demostración:Sea $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión cualquiera en K. para probar la compacidad, basta probar que esa sucesión tiene un punto de acumulación, y que es también un elemento de K. Para demostrar ésto definimos los conjuntos $F_n = \overline{C}_n$, claramente cerrados, encajonados y no vacíos. Como K cumple la propiedad p (por hipótesis), se tiene que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{C}_n \neq \emptyset$. Pero por la parte 1. Esa intersección corresponde exactamente al conjunto de los puntos de acumulación de $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Como por hipótesis la intersección es no vacía, existe al menos un punto de acumulación, que es lo que queríamos probar. (el hecho de que el punto de acumulación esté en K se deduce de que K es cerrado)

3. Recíprocamente, demuestre que si $K \subseteq \overrightarrow{E}$ es compacto, entonces K veri-

fica la propiedad p definida en la parte anterior.
Demostración:Sea $\{F_n\}_{n\geq 1}$Familia de subconjuntos cerrados de K encajonados y no vacíos. Debemos probar que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$. El truco está en elegir una sucesión adecuada. Por compacidad ésta sucesión tendra un punto de acumulación que demostraremos está en $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ .Al tener al menos un punto, esa intersección sera no vacia, que es lo que se quiere probar.
Consideremos la sucesión $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n \in F_n$(podemos escoger estos puntos pues $F_n \neq \emptyset$) . Como K es compacto, ésta sucesión tiene un punto de acumulación $\bar{x}\in K$. Demostremos que de hecho $\bar{x}\in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$,i.e. $\bar{x} \in F_n\ \forall n \in \mathbb{N}$.
Sea $n \in \mathbb{N}$. Como $\bar{x}$ es punto de acumulación, existe $x_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \bar{x}$, para cierta subsucesión. Sea $\epsilon > 0$, entonces existe k_0 tal que $\forall k \geq k_0\ ||x_{n_k} - \overline{x}|| \leq \epsilon$. Consideremos $k \geq k_0$ tal que $n_k \geq n$. Sabemos por construcción de los $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que $x_{n_k} \in F_{n_k}$. Pero recordemos que los $\{F_n\}_{n\geq 1}$son una familia encajonada, entonces se tiene $x_{n_k} \in F_{n_k} \subseteq F_{n_k-1} \subseteq .... \subseteq F_n \subseteq F_{n-1} \subseteq .... \subseteq F_1$. Luego, $x_{n_k} \in F_n$ y $x_{n_k} \in B(\overline{x}, \epsilon)$ (pues tomamos $k \geq k_0$),lo que implica $F_n \cap B(\overline{x}, \epsilon) \neq \emptyset$. Como el n y el ϵ fueron escogidos de forma totalmente arbitraria, tenemos que $\forall n \in \mathbb{N}\, \forall \epsilon > 0\ F_n \cap B(\overline{x}, \epsilon) \neq \emptyset$, lo que equivale a decir $\forall n \in \mathbb{N}\, x \in \overline{F_n}$. Como los F_n son cerrados, $F_n = \overline{F_n}$, luego $\forall n \in \mathbb{N}\, x \in F_n$, i.e. $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$,que es lo que queríamos demostrar.
Nota: Un punto clave en esta demostración es escoger el k adecuado, para después aprovecharse de la propiedad de encajonamiento. ¿Por qué se puede elegir de esa forma?.

4. Dé un ejemplo en $\mathbb{R}$ de una familia $\{A_n\}_{n\geq 1}$encajonada de subconjuntos no vacíos de $K = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ cuya intersección sea vacia.
Demostración:Ejercicio.