Auxiliar nº2: Cálculo en Varias Variables

Profesor: Rafael Correa F.
Auxiliares: Raimundo Briceño, Adolfo Henríquez,
Gonzalo Mena & Emilio Vilches

25 de marzo, 2009

Pregunta 1

Sea $\left(\overrightarrow{E}, ||\cdot||\right)$ un e.v.n.

1. Sean $F_1...F_n \subseteq \overrightarrow{E}$conjuntos compactos. Demuestre que $F = \bigcup\limits_{i=1..n} F_n$ es compacto.

2. Sea F cerrado y K compacto, $F, K \subseteq \overrightarrow{E}$. Demuestre que $F \cap K$ es compacto.

3. Sea F cerrado y K compacto tal que $F \subseteq K \subseteq \overrightarrow{E}$. Demuestre que F es compacto.

4. Sea $\{K_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$con $K_\lambda \subseteq \overrightarrow{E}$ $\forall \lambda \in \Lambda$ una familia de compactos. Demuestre que $K = \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda$ es compacto.

Pregunta 2

Sea $\left(\overrightarrow{E}, ||\cdot||\right)$ un e.v.n.

1. Demuestre que todas las sucesiones de cauchy en $\overrightarrow{E}$ son acotadas.

2. Demuestre que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es sucesión de cauchy en $\overrightarrow{E}$ y tiene un punto de acumulación entonces converge.

3. $A \subseteq \overrightarrow{E}$se dice completo si $\forall\, (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ de cauchy se tiene que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge y su límite pertenece a A. Demuestre que si $A \subseteq \overrightarrow{E}$ es compacto entonces A es completo.

4. Supongamos ahora que $\overrightarrow{E}$ es Banach. Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se dirá normalmente convergente si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} ||x_n|| < \infty$.(es decir, la sucesión $a_n =$

$\sum_{m=0}^{n} ||x_m||$ converge en $\mathbb{R}$). Demuestre que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es normalmente convergente entonces $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ es convergente en $\overrightarrow{E}$ (esto quiere decir que la sucesión $a_n = \sum_{m=0}^{n} x_m$ converge en $||\cdot||$)

Pregunta 3

Sea $\left(\overrightarrow{E}, ||\cdot||\right)$ un e.v.n.

1. Considere una sucesión $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Definimos el conjunto $C_n \subseteq \overrightarrow{E}$ como:
$$C_n = \{\vec{x}_k : k \geq n\}$$
Denotemos por C al conjunto de todos los puntos de acumulación de la sucesión $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Demuestre entonces que
$$C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{C_n}$$

2. Sea $K \subseteq \overrightarrow{E}$ un conjunto cerrado que verifica la propiedad:
p:"Para toda Familia $\{F_n\}_{n\geq 1}$de subconjuntos cerrados de K (es decir $F_n \subseteq K$, F_n cerrado $\forall n \in \mathbb{N}$) encajonados ($F_n \supseteq F_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$) y no vacíos ($F_n \neq \emptyset\ \forall n \geq 1$) se tiene que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$". Demuestre que el conjunto K es compacto.

3. Recíprocamente, demuestre que si $K \subseteq \overrightarrow{E}$ es compacto, entonces K verifica la propiedad p definida en la parte anterior

4. Dé un ejemplo en $\mathbb{R}$ de una familia $\{A_n\}_{n\geq 1}$encajonada de subconjuntos no vacíos de $K = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ cuya intersección sea vacia.