Examen, MA11A Algebra
1 Diciembre, 2003

Problema 1:

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y considere la ecuación

$$\alpha x^2 + \alpha y^2 + 2(\alpha - 1)xy - \sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 0.$$

Determine todos los valores de α tales que la ecuación corresponde a:

- circunferencia
- elipse
- recta o rectas
- parábola
- hipérbola
- conjunto vacío
- un punto

(6 ptos.)

Solución:

Estudiaremos en rpimer lugar la parte cuadrática de la ecaución, luego tenemos que

$$\alpha x^2 + \alpha y^2 + 2(\alpha - 1)xy = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & (\alpha - 1) \\ (\alpha - 1) & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Veamos los valores propios y vectores propios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & (\alpha - 1) \\ (\alpha - 1) & \alpha \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de A es

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} \alpha - \lambda & (\alpha - 1) \\ (\alpha - 1) & \alpha - \lambda \end{vmatrix} = (\alpha - \lambda)^2 - (\alpha - 1)^2 = \lambda^2 - 2\alpha\lambda + 2\alpha - 1 = (\lambda - 1)(\lambda - (2\alpha - 1)),$$

y tenemos que los valores propios son

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 2\alpha - 1,$$

y si $\alpha = 1$ estos dos valores coinciden, pero en este caso, la ecuación es

$$x^2 + y^2 - \sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 0$$

que corresponde a una circunferencia de centro $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ y radio 1.

Veamos el caso $\alpha \neq 1$. Si $\lambda = 1$ entcnces se tiene que $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ si y sólo si es solución del sistema

$$\begin{pmatrix} (\alpha - 1) & (\alpha - 1) \\ (\alpha - 1) & (\alpha - 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow x + y = 0$$

y por lo tanto un vector propio es

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

y dado que el vector propio asociado al valor propio $\lambda_2 = 2\alpha - 1$ es ortogonal a v_1, tenemos que

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto la matriz A la podemos escribir como

$$A = PDP^t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2\alpha - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

y consideremos las nuevas variables

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y \end{pmatrix}$$

obteniendo la ecaución en la forma

$$u^2 + (2\alpha - 1)v^2 - 2u = 0 \Longleftrightarrow (u-1)^2 + (2\alpha - 1)v^2 = 1.$$

Así tenemos lo siguiente:

- $2\alpha - 1 = 0 \Longleftrightarrow \alpha = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow$ tenemos dos rectas $u = 0 \ \wedge u = 2$.
- $2\alpha - 1 > 0 \ \wedge \ \alpha \neq 1$ tenemos una elipse.
- $\alpha = 1$ se tiene una circunferencia
- $2\alpha - 1 < 0$ se tiene una hipérbola.

U. DE CHILE

INGENIERIA

Pauta Examen MA11A Álgebra

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.

Semestre Primavera 2004

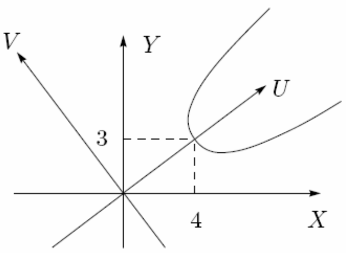
El objetivo de esta pauta es orientar la corrección de los ayudantes y dar al alumno una guía de estudio. Esta se puede obtener en la página:
`http://www.dim.uchile.cl/~lmella/MA11A.html` en formato ps o pdf.

P1.- a) (4 ptos.) Identifique y dibuje la cónica

$$4x^2 + 4y^2 + 2xy - 2\sqrt{2}x - 8\sqrt{2}y - 7 = 0,$$

encontrando un cambio de variables que permita escribirla de manera centrada con respecto a ejes adecuados. Explicite todos los cambios de variables requeridos.

b) (2 ptos.) La cónica de la figura tiene ecuación $u = 5 + v^2$ donde u y v son variables en los ejes U y V. Encuentre la ecuación de la cónica anterior en las variables x, y (con respecto a los ejes X, Y de la figura).



Pauta.

a) La forma cuadrática en la ecuación de la cónica se puede escribir como

$$4x^2 + 4y^2 + 2xy = (x\,y)\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Definamos

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Valores propios:

$$\det\,(A - \lambda I) = 0$$
$$\det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 1 & 4-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

y resolvemos

$$(4-\lambda)^2 - 1 = 0$$
$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 - 1 = 0$$
$$\lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0$$

$$\lambda = \frac{8 \pm \sqrt{64-60}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2} = 5 \text{ y } 3.$$

Vectores propios de A:

$$\lambda = 5 \quad A - 5I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\mathrm{Ker}(A - 5I) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\lambda = 3, A - 3I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\mathrm{Ker}(A - 3I) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Luego

$$A = PDP^t \quad \text{donde } P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Realicemos el cambio de variables

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{es decir} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}(x, y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= (x, y)P\,D\,P^t\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (u, v)D\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= 5u^2 + 3v^2\end{aligned}$$

Tomando en cuenta

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} u+v \\ u-v \end{pmatrix}$$

la ecuación de la cónica queda

$$\begin{aligned}5u^2 + 3v^2 - 2\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}(u+v) - 8\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}(u-v) - 7 &= 0 \\ 5u^2 + 3v^2 - 2u - 2v - 8u + 8v - 7 &= 0 \\ 5u^2 - 10u + 3v^2 + 6v - 7 &= 0 \\ 5(u^2 - 2u) + 3(v^2 + 2v) - 7 &= 0 \\ 5((u-1)^2 - 1) + 3((v+1)^2 - 1) - 7 &= 0 \\ 5(u-1)^2 - 5 + 3(v+1)^2 - 3 - 7 &= 0 \\ 5(u-1)^2 + 3(v+1)^2 &= 15 \\ \left(\frac{u-1}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{v+1}{\sqrt{5}}\right) &= 1\end{aligned}$$

que es una elipse con semiejes $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$.

b) La matriz de rotación que cambia las coordenadas (u, v) a (x, y) viene dada por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{pmatrix}.$$

En efecto, el punto con coordenadas $(u, v) = (1, 0)$ según la figura tiene coordenadas $(x, y) = (4, 3)$ por lo que la primera columna de P debe ser $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}/5$ y el punto con coordenadas $(u, v) = (0, 1)$ tiene coordenadas $(x, y) = (-3, 4)$ por lo que la segunda columna de P viene dada por $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}/5$. Como P es ortonormal

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^t\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5}(4x + 3y, -3x + 4y)$$

Reemplazando en la ecuación de la cónica $u = 5 + v^2$ obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{5}(4x + 3y) &= 5 + \frac{1}{25}(-3x + 4y)^2 \\ 5(4x + 3y) &= 125 + (9x^2 - 24xy + 16y^2)\end{aligned}$$

$$\boxed{9x^2 + 16y^2 - 24xy - 20x - 15y + 125 = 0}$$