# <u>Auxiliar Algebra Lineal</u>

**P1**

**P2.–** Considere las siguientes matrices reales,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(i) (4 ptos.) Calcule los valores y vectores propios de las matrices $A$, $B$ y $C$. Diga cuales de ellas son diagonalizables.

---

**P2**

3. Sean $R, S \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, con $S$ invertible. Considere $A = R \cdot S$ y $B = S \cdot R$.

(a) (2 ptos.) Pruebe que $v \in \mathbb{R}^n$ es vector propio de $A$ asociado al valor propio $\lambda \in \mathbb{R}$ **ssi** $Sv$ es vector propio de $B$ asociado al mismo valor propio $\lambda$. Concluya que $A$ y $B$ tienen los mismos valores propios.

---

**P3**

**P2.–**

(2.1) (3 ptos.) Sea $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$. De una base ortonormal de vectores propios de $A$.

**Pauta P1**

**P2.** (i)

1. – Calculemos los valores y vectores propios de la matriz $A$:

$det(A-\lambda I) = (2-\lambda)^3(-\lambda) \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0$ son los valores propios de $A$.

– Vectores propios asociados a 2:

El sistema $(A-2I)x = 0$ se escribe: $x_2 = x_3 = 0$, $x_1, x_4 \in I\!R$. Luego el espacio propio asociado a 2 es:

$$W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

– Vectores propios asociados a 0.

El sistema $(A-0I)x = 0$ se escribe $\begin{array}{r} 2x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_2 = 0 \\ 2x_4 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} x_2 = x_4 = x_1 = 0 \\ x_3 \in I\!R \end{array}$. Luego el espacio propio asociado a 0 es:

$$W_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Luego la matriz no es diagonalizable pues no existe una base de $I\!R^4$ formada de vectores propios.

2.– Calculemos los valores y vectores propios de la matriz $B$:

$$\begin{aligned} det(B-\lambda I) &= (2-\lambda)\left[(1-\lambda)^2(2-\lambda) - (2-\lambda)\right] \\ &= (2-\lambda)^2[\lambda^2 + 1 - 2\lambda - 1] \begin{array}{l} = (2-\lambda)^2(\lambda-2)\cdot\lambda \\ = (\lambda-2)^3\cdot\lambda \end{array} \end{aligned}$$

Luego los valores propios son $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0$.

– Vectores propios asociados a 2:

El sistema $(B-2I)x = 0$ se escribe: $\begin{array}{r} -x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{array}$
$\Rightarrow x_2 = x_3, x_1, x_4 \in I\!R$.

$$\Rightarrow \quad W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

– Vectores propios asociados a 0:

El sistema $(B - 0I)x = 0$ se escribe:

$$\begin{aligned} 2x_1 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_4 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= -x_3 \\ x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow W_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Luego existe una base de vectores propios de $B$ para $I\!R^4$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

lo que implica que $B$ es diagonizable.

3.– Calculemos los valores propios de $C$:

$$det(C - \lambda I) = (-\lambda)(2-\lambda)^3 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0$$

El espacio propio asociado a 2 es:

$$W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

y el espacio propio asociado a 0 es:

$$W_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

pues $C$ es diagonal.

**Pauta P2**

## Pregunta 3.

(a)

$$\begin{aligned} A\ v = \gamma\ v &\Leftrightarrow & R \cdot Sv = \gamma v \\ &\Leftrightarrow & S(R \cdot Sv) = S(\gamma v) \text{ (pues S invertible)} \\ &\Leftrightarrow & SR(Sv) = \gamma(Sv) \end{aligned}$$

Como $v \neq 0$ y S invertible entonces $Sv \neq 0$ además $B(Sv) = \gamma(Sv)$ , luego $Sv$ es vector propio de $B$ asociado a $\gamma$.

Recíprocamente si $B(Sv) = \gamma(Sv)$ con $Sv \neq 0$ entonces $v \neq 0$ pues S es invertible y

$$B^{-1}B(Sv) = S^{-1}(\gamma Sv)$$

$$\Leftrightarrow R\ S\ v = \gamma v \Leftrightarrow Av = \gamma v$$

lo que dice que $v$ es vector propio de $A$ asociado a $\gamma$.

Luego $\{\gamma \in I\!\!R |\ \gamma \text{ es valor propio de } A\} \subseteq \{\gamma \in I\!\!R | \gamma \text{ es } v.p. \text{ de } B\}$. Ahora si $\gamma \in I\!\!R$ es $v.p$ de $B$ se tiene que $Bu = \gamma u$ para $u \in I\!\!R^n \setminus \{0\}$. Pero $S$ es invertible luego $u = Sv$ para algún $v \in I\!\!R^n \setminus \{0\}$. Es decir $Sv$ es vector propio de $B$ asociado a $\gamma \in I\!\!R$. Luego por lo anterior $\gamma$ es valor propio de $A$. Es decir $\{$valores propios de $A\} = \{$valores propios de $B\}$

**Pauta P3**

## Pregunta 2.

2.1) Cálculo valores propios:

$$det\begin{bmatrix} (-2-\lambda) & | & 2 & | & 0 \\ 2 & | & (-4-\lambda) & | & 2 \\ 0 & | & 2 & | & (-2-\lambda) \end{bmatrix} = (-2-\lambda)[(-4-\lambda)(-2-\lambda)-4]-2[2(-2-\lambda)-0]$$

$$\begin{aligned} &= (-1)(2+\lambda) \quad ([(\lambda+4)(\lambda+2)-4]-4) \\ &= (-1)(\lambda+2) \quad (\lambda^2+6\lambda+8-8) \\ &= (-1)(\lambda+2) \quad \cdot\lambda\cdot\lambda\cdot(\lambda+6) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ valores propios $-2, 0, -6$

Cálculo $W_{-2}$ :

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} y &= 0 \\ 2x+2z &= 0 \Rightarrow x = -z \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow W_{-2} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

y $u_1 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Cálculo de $W_0$ :

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} 2y-2z &= 0 \Rightarrow y = z \\ -2x+2y &= 0 \Rightarrow x = y = z \end{aligned}$$

$$\Rightarrow W_0 = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

y $u_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

Cálculo de $W_{-6}$ :

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} y = -2z \\ x = z \end{matrix} \Rightarrow W_6 = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

$$\Rightarrow u_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \{u_1, u_2, u_3\}$ es base ortonormal de vectores propios pues $u_1, u_2, u_3$ son vectores propios asociados a valores propios $\neq$ y resultan ortogonales. Como dividimos por la norma, son de norma 1.