AUXILIAR

P1.-

(a) Sea $V = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$.

(i) (1.5 ptos.) Calcular una base ortonormal de V y calcular su dimensión.

(ii) (1.5 ptos.) Calcular una base de $V^{\perp}$ (V ortogonal).

(b) (3 ptos.) Sea M una matriz triangular superior de dimensión $n \times n$ cuya diagonal es estrictamente positiva. Sean $v_1, v_2, ..., v_n$ los distintos vectores columnas de M ordenados de la primera a la última columna. Probar por recurrencia que al aplicar el algoritmo de Gram-Schmidt a la base $\{v_1, ..., v_n\}$ se obtiene como resultado la base canónica $\{e_1, ..., e_n\}$.

Pauta

Pregunta 3.

(a)

(i) Apliquemos directamente el procedimiento de $G.S.$ a este generador:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow ||v_1|| = 2 \Rightarrow w_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \text{ (es normal)}$$

$$\tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3/2 \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/4 \\ -1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}, ||\tilde{v}_2|| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow w_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} -$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} \frac{3}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} - \sqrt{3} \begin{pmatrix} \frac{3}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5/2 \\ -5/2 \\ 5/2 \\ -5/2 \end{pmatrix} -$$

$$\begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & + & 5/2 & - & 3/2 \\ 3 & - & 5/2 & - & 1/2 \\ -3 & + & 5/2 & + & 1/2 \\ 3 & - & 5/2 & - & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

luego $\tilde{v}_3$ es dependiente con los anteriores, $V = \langle \{w_1, w_2\} \rangle$ es una base ortogonal y dim $V = 2$

(b) Supongamos en G.S: $w_1 = \frac{v_1}{||v_1||}$ luego como $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ | \\ 0 \end{pmatrix}$ con $a > 0$ se tiene que

$w_1 = e_1$.

Supongamos hemos probado que $w_1 = e_1, \cdots, w_k = e_k$ en G.S., con $1 \leq k < n$ y queremos hacer entrar v_{k+1}. Entonces

$$\tilde{v}_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \underbrace{< v_{k+1}, e_i >}_{\text{componente de } v_{k+1}} \qquad e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \text{posición}(k+1, k+1)$$

de M que es > 0

luego $\tilde{v}_{k+1} =$ cte. e_{k+1} y cte. > 0. Luego

$\frac{\tilde{v}_{k+1}}{\text{cte}} = e_{k+1}$.

Esto prueba que G - S conduce a $\{e_1, \cdots, e_n\}$.

Otro Problema

P2.- a) Sean

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

i) (1 pto.) Encuentre una base del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ generado por v_1, v_2, v_3, v_4.

ii) (1 pto.) De una base de vectores ortogonales entre sí para el subespacio de la parte anterior.

iii) (1 pto.) Encuentre una base del espacio $\langle\{v_1, v_2, v_3, v_4\}\rangle$.

Pauta.

a) i) Formamos una matriz con filas dadas por los vectores v_1, v_2, v_3, v_4 y escalonamos

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & -4 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Deducimos que v_1 y v_2 son l.i. mientras que v_3 y v_4 son combinaciones lineales de v_1 y v_2. Luego una base del espacio generado por v_1, v_2, v_3, v_4 es $\{v_1, v_2\}$. También es cierto que v_1 y $(0, -1, 1, 1)$ generan el espacio anterior.

ii) Construiremos un vector $w \in \mathbb{R}^4$ tal que v_1 y w sean ortogonales y v_1, w generen el mismo subespacio que $\{v_1, v_2\}$. De este último requerimiento es claro que debemos buscar w de la forma $w = \alpha v_1 + \beta v_2$. Ahora bien,

$$\langle w, v_1\rangle = \langle \alpha v_1 + \beta v_2, v_1\rangle = \alpha\langle v_1, v_1\rangle + \beta\langle v_2, v_1\rangle.$$

Pero

$$\langle v_1, v_1\rangle = 1 + 1 + 4 = 6 \qquad \langle v_2, v_1\rangle = 1 + 2 - 6 = -3.$$

Luego debemos hallar α, β tales que $6\alpha - 3\beta = 0$. Podemos elegir $\alpha = 1$, $\beta = 2$. Así encontramos

$$w = v_1 + 2v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

iii) Buscamos el espacio ortogonal a $\langle\{v_1, v_2, v_3, v_4\}\rangle$ que es el mismo que el ortogonal a $\langle\{v_1, v_2\}\rangle$. Escribamos las condiciones que satisface $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \langle\{v_1, v_2\}\rangle^{\perp}$:

$$\langle x, v_1\rangle = 0, \qquad \langle x, v_2\rangle = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 & & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ x_1 & -x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0. \end{cases}$$

Escalonando este sistema encontramos

$$\begin{matrix} x_1 & & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \\ & -x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0. \end{matrix}$$

Dejando x_3, x_4 como parámetros tenemos $x_2 = x_3 + x_4$ y $x_1 = -x_3 - 2x_4$. Así podemos escribir el conjunto solución de este sistema como

$$\left\{ \begin{bmatrix} -x_3 - 2x_4 \\ x_3 + x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} : x_3, x_4 \subset \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : x_3, x_4 \subset \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Estos dos últimos son claramente l.i., luego tenemos una base de $\langle v_1, v_2 \rangle^{\perp}$.

PROBLEMA 3:

(i).- Sea $W = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

(i.1).- (0.5 pts) Pruebe que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in W^{\perp}$

(i.2).- (2.5 pts) Encuentre bases ortonormales de W y $W^{\perp}$.

PROBLEMA 3:

(i.1).- Basta observar que

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 - 1 - 1 + 1 = 0\,, \quad \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 2 - 1 - 2 + 1 = 0\,,$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = -1 - 1 + 1 + 1 = 0\,,$$

y que además,

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 + 1 - 1 - 1 = 0\,, \quad \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 2 + 1 - 2 - 1 = 0\,,$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = -1 + 1 + 1 - 1 = 0\,.$$

(i.2).- Observar que $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 1-1+1-1 = 0$. Luego, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ son ortogonales.

Por lo tanto, la dimensión de $W^{\perp}$ es al menos 2.

Para encontrar una base ortonormal de W aplicamos Gram–Schmidt a los vectores

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad w_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Como $||w_1|| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + 1^2} = 2$, de w_1 obtenemos

$$\widehat{w}_1 = \frac{w_1}{||w_1||} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Siguiendo con el algoritmo de Gram–Schmidt, calculamos

$$\begin{aligned} w_2' = w_2 - \langle w_2, \widehat{w}_1 \rangle \widehat{w}_1 &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Luego, Como $||w_2'|| = \sqrt{(1/2)^2 + (1/2)^2 + (-1/2)^2 + (-1/2)^2} = 1$, de w_2' obtenemos

$$\widehat{w}_2 = \frac{w_2'}{||w_2||} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

Como la dimensión de $W-$ es al menos 2 y $W \oplus W^{\perp} = \mathbb{R}^4$, se debe tener que la dimensión de W es a lo más 2. Luego, como $\{\widehat{w}_1, \widehat{w}_2\}$ son dos vectores unitarios ortogonales en W deben ser base de W. Sigue que una base ortonormal de W es

$$\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

En particular la dimensión de W es 2 y por lo tanto la dimensión de $W^\perp$ también es 2. Luego, como sabemos que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ son ortogonales, para obtener una base ortonormal de $W^\perp$ basta normalizar los anteriores vectores para que queden unitarios. Las normas de los mencionados vectores son $\sqrt{1^2 + 1+1^2 + 1^2} = 2$ y $\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2 + (-1)^2} = 2$ respectivamente. Sigue que, una base ortonormal de $W^\perp$ es

$$\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

<u>Observación 1</u>: De haber continuado aplicando el algoritmo de Gram–Schmidt a w_3 se hubiese obtenido que $\widehat{w}_3 - w'_3 - 0$, y por lo tanto se hubiese llegado a la misma conclusión a expensas de tener que realizar más cálculos.

<u>Observación 2</u>: Con un poco de astucia uno puede evitar realizar Gram–Schmidt. En efecto, es fácil ver que el primer y tercer vector generador de W son ortogonales. Luego, una vez probado (i.1) uno tiene dos vectores en W y dos en $W-$ que son ortogonales entre si. Basta normalizar estos vectores para obtener las bases encontradas más arriba.