Problema 1

PROBLEMA 2: Sean V, W e. v.'s sobre $\mathbb{R}$. En $V \times W$ se definen la suma y ponderación por escalar así:

$$\begin{aligned}(v,w)+(v',w') &= (v+v',w+w'), \quad \forall (v,w),(v',w') \in V \times W, \\ \lambda(v,u) &= (\lambda v, \lambda w), \quad \forall (v,w) \in V \times W, \forall \lambda \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Con estas operaciones $V \times W$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ (no lo pruebe).

Dada una función $f : V \to W$ se define su gráfico por

$$G_f = \{(v,w) \in V \times W : w = f(v)\}.$$

(i).- (2.5 pts) Pruebe que f es lineal sí y sólo si G_f es sub–espacio vectorial de $V \times W$.

(ii).- (1.5 pts) Pruebe que $\{0_V\} \times W$ es sub–espacio vectorial de $V \times W$.

Nota: 0_V denota el neutro aditivo de V.

Solucion

PROBLEMA 2:

(i).- Supongamos que f es lineal. Como $0_V \in V$, entonces $(0_V, f(0_V)) \in G_f$, luego $G_f \neq \emptyset$. Para establecer que G_f es sub–espacio vectorial de $V \times W$ bastará verificar que cualquiera sean $(v,w),(v',w') \in G_f$ y $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ se tiene que $\alpha(v,w)+\beta(v',w') \in G_f$. En efecto, $\alpha(v,w)+\beta(v',w') = (\alpha v+\beta v', \alpha w+\beta w')$ y como f es lineal,

$$f(\alpha v + \beta v') = \alpha f(v) + \beta f(v) = \alpha w + \alpha w',$$

donde la última igualdad es consecuencia del hecho que $(v,w),(v',w') \in G_f$. Sigue que $\alpha(v,w) + \beta(v',w') \in G_f$ como queríamos comprobar.

Supongamos ahora que G_f es sub–espacio vectorial de $V \times W$. Para establecer que f es lineal bastará verificar que cualquiera sean $v, v' \in V$ y $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $f(\alpha v + \beta v') = \alpha f(v) + \beta f(v')$. Esto último equivale a probar que $(\alpha v + \beta v', \alpha f(v) + \beta f(v')) \in G_f$. Pero esto es obvio puesto que $(\alpha v + \beta v', \alpha f(v) + \beta f(v')) = \alpha(v, f(v)) + \beta(v', f(v'))$, luego dado que $(v, f(v)), (v', f(v')) \in G_f$ y que G_f es un espacio vectorial, se concluye que $(\alpha v + \beta v', \alpha f(v) + \beta f(v')) \in G_f$.

(ii).- Como $(0_V, 0_W) \in (\{0_V\} \times W)$ se tiene que $(\{0_V\} \times W) \neq \emptyset$. Para establecer que $(\{0_V\} \times W)$ es sub–espacio vectorial de $V \times W$ bastará verificar que cualquiera sean $(v,w),(v',w') \in (\{0_V\} \times W)$ y $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ se tiene que $\alpha(v,w) + \beta(v',w') \in (\{0_V\} \times W)$. En efecto, $(v,w),(v',w') \in (\{0_V\} \times W)$ implica que $v, v' \in \{0_V\}$, i.e., $v = v' = 0_V$. Luego,

$$\alpha(v,w) + \beta(v',w') = (\alpha 0_V + \beta 0_V, \alpha w + \beta w') = (0_V, \alpha w + \beta w') \in (\{0_V\} \times W),$$

donde la última pertenencia es consecuencia del hecho que W es espacio vectorial, luego $\alpha w + \beta w' \in W$ dado que $w, w' \in W$.

Problema 2

P2.– Sea $U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \in M_{2\times2}(I\!R) \ / \ a, b \in I\!R \right\}$.

(i) (1.5 ptos.) Probar que U es un subespacio vectorial de $M_{2\times2}(I\!R)$.

(ii) (1.5 ptos.) Encuentre una base de U y su dimensión.

Sin pauta

Problema 3

3. Sea $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices de 2×2 a coeficientes reales sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. Considere los subconjuntos W_1, W_2 de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ siguientes:

$$W_1 = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) | A_{11} + A_{12} + A_{21} + A_{22} = 0\} \quad W_2 = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) | A_{11} + A_{22} = 0\}$$

(a) (1 pto) Demuestre que W_1 es un subespacio vectorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(b) (1 pto) Demuestre que W_2 es un subespacio vectorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(c) (1 pto) Encuentre una base de W_1 y dé su dimensión.

(d) (1 pto) Encuentre una base de W_2 y dé su dimensión.

Solucion

3. (a) Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Sean $P, Q \in W_1$. Sigue que

$$(\alpha P + \beta Q)_{11} + (\alpha P + \beta Q)_{12} + (\alpha P + \beta Q)_{21} + (\alpha P + \beta Q)_{22}$$
$$=$$
$$\alpha(P_{11} + P_{12} + P_{21} + P_{22}) + \beta(P_{11} + P_{12} + P_{21} + P_{22})$$
$$=$$
$$0$$

Luego, $(\alpha P + \beta Q) \in W_1$

(b) Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Sean $P, Q \in W_2$. Sigue que

$$\begin{aligned}(\alpha P + \beta Q)_{11} + (\alpha P + \beta Q)_{22} &= \alpha(P_{11} + P_{22}) + \beta(P_{11} + P_{22}) \\ &= 0\end{aligned}$$

Luego, $(\alpha P + \beta Q) \in W_2$

[0/1 pto]

(c) $A \in W_1$ si y solamente si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & (-a-b-c) \end{bmatrix}$

Es decir:

$$A = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Luego:

$$W_1 = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$

[0/0.5 ptos]

Falta demostrar que el conjunto de las tres matrices es l.i. En efecto: si

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 0$$

entonces

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha - \beta - \gamma \end{bmatrix} = 0$$

Se concluye que $\alpha = \beta = \gamma = 0$ y, por lo tanto, la dimensión de W_1 es 3.

[0/0.5 ptos]

Problema 4

PROBLEMA 2:

(i).- Sea V espacio vectorial de dimensión n. Decimos que $\{v_1, \ldots, v_m\} \subseteq V$ es un conjunto ***casi independiente*** de vectores si $m > n$ y para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$ se tiene que $\{v_1, \ldots, v_m\} \setminus \{v_j\}$ es linealmente independiente.

(i.1).- (1.5 pts) Pruebe que si $\{v_1, \ldots, v_m\}$ es casi independiente, entonces $m = n + 1$.

(i.2).- (1.5 pts) De un ejemplo en $V = \mathbb{R}^2$ de un conjunto casi independiente.

Solucion

PROBLEMA 2:

(i.1).- Por contradicción. Sea $\{v_1, \ldots, v_m\}$ un conjunto casi independiente donde $m > n+1$. Luego, $\{v_1, \ldots, v_m\} \setminus \{v_j\}$ tiene $m-1 > n$ vectores linealmente independientes que pertenecen a V.

Lo anterior contradice el hecho que en un espacio de dimensión n no pueden haber más de n vectores linealmente independientes.

(i.2).- Cualquier conjunto de tres vectores no nulos, donde ningún par es colineal con el origen es un ejemplo válido. En particular, el siguiente conjunto es casi independiente en $\mathbb{R}^2$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$