PAUTA CONTROL 2
ALGEBRA MA11A

Problema 1:

(a) Sea A el conjunto de todas las relaciones binarias en $\mathbb{R}$. Sobre A definamos la relación binaria Ω siguiente:
Sean $R_1, R_2 \in A$, entonces

$$R_1 \, \Omega \, R_2 \iff (\forall x, y \in \mathbb{R}) \, (x \, R_1 \, y \, \Rightarrow \, x \, R_2 \, y \,)$$

Pruebe que Ω es una relación de orden. Muestre además que Ω es de orden parcial en A.

(3 ptos.)

Solución:

Sean $R_1, R_2 \in A$, luego se tiene que:

(a) Ω es refleja, ya que

$$[(\forall x, y \in \mathbb{R}) \, (xR_1y \Longrightarrow xR_1y)] \Longrightarrow R_1 \Omega R_1$$

(b) Ω es antisimétrica, en efecto sean $R_1, R_2 \in A$ tales que $R_1 \Omega R_2$ y $R_2 \Omega R_1$, luego $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$xR_1y \Longrightarrow xR_2y$$

además

$$xR_2y \Longrightarrow xR_1y$$

y por lo tanto, como ambas son relaciones binarias sobre $\mathbb{R}$ se tiene que

$$R_1 = R_2.$$

(c) Ω es transitiva, en efecto sean $R_1, R_2, R_3 \in A$ tales que

$$R_1 \Omega R_2 \quad \wedge R_2 \Omega R_3,$$

luego de la transitividad de $\Longrightarrow$ se tiene que $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$([xR_1y \Longrightarrow xR_2y] \wedge [xR_2y \Longrightarrow xR_3y]) \Longrightarrow (xR_1y \Longrightarrow xR_3y) \, ,$$

por lo tanto se tiene que $R_1 \Omega R_3$.

Lo que prueba que Ω es una relación de orden.

Notemos que esta es una relación de orden parcial ya que no todos los elementos de A estan en relación unos con otros, por ejemplo podemos considerar las relaciones R_1 y R_2 cuyos gráficos son

$$\{(x, 1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \, : \, x \in \mathbb{R}\}$$

y

$$\{(x, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \, : \, x \in \mathbb{R}\} \, .$$

las cuales son diferentes, además $R_1 \not\Omega R_2$ y $R_2 \not\Omega R_1$.

(b) Calcule

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)(k+2)} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)$$

(3 ptos.)

Solución:

Sean $k, n \in \mathbb{N}$ tales que $k \leq n$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(k+1)(k+2)} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) &= \frac{1}{(k+1)(k+2)} \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{(k+2)!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{(k+2)!([n+2]-[k+2])!} \\
&= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{(n+2)!}{(k+2)!([n+2]-[k+2])!} \\
&= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left(\begin{array}{c} n+2 \\ k+2 \end{array} \right),
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)(k+2)} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(n+1)(n+2)} \left(\begin{array}{c} n+2 \\ k+2 \end{array} \right) \\
&= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n+2 \\ k+2 \end{array} \right) (-1)^k \\
&= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{s=2}^{n+2} \left(\begin{array}{c} n+2 \\ s \end{array} \right) (-1)^s \\
&= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left[\left(\sum_{s=0}^{n+2} \left(\begin{array}{c} n+2 \\ s \end{array} \right) (-1)^s \right) - \left(\begin{array}{c} n+2 \\ 0 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} n+2 \\ 1 \end{array} \right) \right] \\
&= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left[\left(\sum_{s=0}^{n+2} \left(\begin{array}{c} n+2 \\ s \end{array} \right) (-1)^s \right) - 1 + (n+2) \right] \\
&= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left[\left(\sum_{s=0}^{n+2} \left(\begin{array}{c} n+2 \\ s \end{array} \right) (-1)^s \right) + (n+1) \right] \\
&= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left[\left(\sum_{s=0}^{n+2} \left(\begin{array}{c} n+2 \\ s \end{array} \right) (-1)^s 1^{(n+2)-s} \right) + (n+1) \right] \\
&= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left[(-1+1)^{(n+2)} + (n+1) \right] \\
&= \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{1}{(n+2)}
\end{aligned}$$

Problema 2:

(a) Pruebe que el conjunto de todas las rectas no verticales que pasan por el punto $(0, 1)$ es no numerable.

(2 ptos.)

(b) Pruebe que el conjunto de todas las rectas no verticales que pasan por el punto $(0, 1)$ y cortan al eje OX en una coordenada racional, es numerable.

(2 ptos.)

(c) Pruebe que el conjunto de todas las rectas no verticales que cortan a los ejes OX y OY en puntos $(a, 0)$ y $(0, b)$ con $a, b \in \mathbb{Q}$ y que no pasan por el origen, es numerable.

(2 ptos.)

Solución:

(a) Notemos que la ecuación de la recta L_m que pasa por el punto $(0, 1)$ y tiene pendiente $m \in \mathbb{R}$ está dada por

$$y = mx + 1.$$

Sea

$$A = \{L_m : L_m \text{ es una recta que pasa por el punto } (0, 1) \text{ y tiene pendiente } m\}.$$

Entonces podemos definir la función

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ L_m &\longrightarrow f(L_m) = m. \end{aligned}$$

Podemos ver que esta función es una biyección y por tanto se tiene que

$$|A| = |\mathbb{R}|$$

y así A es no numerable.

(b) Notemos que la ecuación de la recta que pasa por el punto $(0, 1)$ y corta al eje OX en el punto $(a, 0)$ está dada por

$$ay - 1 = mx,$$

donde

$$m = \frac{-1}{a},$$

es decir

$$a(1 - y) = x.$$

Notemos que como las rectas son no verticales, entonces $a \neq 0$, así se tiene que $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ y luego la pendiente de la recta está dada por

$$m = \frac{-1}{a} \in \mathbb{Q}\{0\}.$$

Podemos entonces definir la función siguiente:

Solución 1: Sea

$$A = \{L_a : L_a \text{ es una recta que pasa por el punto } (0, 1) \text{ y por el punto } (a, 0) \text{ con } a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\}.$$

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow \mathbb{Q} \setminus \{0\} \setminus \{0\} \\ L_a &\longrightarrow f(L_a) = a. \end{aligned}$$

Esta función es una biyección, luego como $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ es numerable y la cardinalidad de A es la misma que la de $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ se concluye que A es numerable.

Solución 2: Sea

$$A = \{L_m : L_m \text{ es una recta que pasa por el punto } (0, 1) \text{ y tiene pendiente } m \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\}.$$

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow \mathbb{Q} \setminus \{0\} \\ L_a &\longrightarrow f(L_a) = a. \end{aligned}$$

Esta función es una biyección, luego como $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ es numerable y la cardinalidad de A es la misma que la de $\mathbb{Q}$ se concluye que A es numerable.

(c) Sea L_{ab} una recta no vertical que pasa por los puntos $(a,0)$ y $(0,b)$ con $a,b \in \mathbb{Q}$ y que no pasa por el origen.

Puesto que $(0,0) \notin L_{ab}$ entonces se tiene que $a,b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

Notemos que dado que $\mathbb{Q}$ es numerable, entonces se tiene que $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ es también numerable. Podemos definir la función siguiente:

Sea

$$A = \{L_{ab} : L_{ab} \text{ es una recta que pasa por los puntos } (a,0) \text{ y } (0,b) \text{ con } a,b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\}.$$

Luego sea

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow (\mathbb{Q} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{Q} \setminus \{0\}) \\ L_{a,b} &\longrightarrow f(L_{a,b}) = (a,b). \end{aligned}$$

Esta función es una biyección, luego como $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ es numerable, se tiene que $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{Q} \setminus \{0\})$ es numerable, y como la cardinalidad de A es la misma que la de $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{Q} \setminus \{0\})$ se concluye que A es numerable.

Problema 3:

Consideremos la siguiente sucesión $\{a(n)\}_{n\geq 1}$ definida por recurrencia.

Sean

$$a(1) = a(2) = 1$$

y sea

$$a(n) = 3[a(n-1) + a(n-2)] + 1.$$

(a) Pruebe utilizando Inducción Matemática que

$$a(3n+2) - 1$$

es divisible por 2.

(2 ptos.)

(b) Pruebe utilizando Inducción Matemática que

$$3a(3n+1) + 5$$

es divisible por 8.

(2 ptos.)

(c) Pruebe utilizando Inducción Matemática que

$$a(3n) + a(3n+1)$$

es divisible por 32.

(2 ptos.)

Solución:

Consideremos la siguiente sucesión $\{a(n)\}_{n\geq 1}$ definida por recurrencia.

Sean

$$a(1) = a(2) = 1$$

y sea

$$a(n) = 3[a(n-1) + a(n-2)] + 1.$$

Luego se tiene que

$$\begin{aligned} a(3) &= 3\,[a(2) + a(1)] + 1 = 7, \\ a(4) &= 3\,[a(3) + a(2)] + 1 = 3(7+1) + 1 = 25, \\ a(5) &= 3\,[a(4) + a(3)] + 1 = 3(25+7) + 1 = 3 \cdot 32 + 1 = 97. \end{aligned}$$

(a) Veamos que

$$a(3n+2) - 1$$

es divisible por 2.

En efecto, si $n = 1$, entonces

$$a(3+2) - 1 \quad = a(5) - 1 = 96$$

el cual es divisible por 2.

Veamos que se cumple para todos los $n \in N$, $n \geq 1$.

Hipótesis de Inducción

Supongamos que

$$a(3n+2) - 1$$

es divisible por 2.

Tesis de Inducción

Por demostrar que

$$a(3(n+1)+2) - 1$$

es divisible por 2.

En efecto

$$\begin{aligned}
a(3(n+1)+2)-1 &= a(3n+5)-1 \\
&= (3\left[a(3n+4)+a(n+3)\right]+1)-1 \\
&= 3\left(a(3n+4)+a(3n+3)\right) \\
&= 3a(3n+4)+3a(3n+3) \\
&= 3\left(3\left[a(3n+3)+a(3n+2)\right]+1\right)+3a(3n+3) \\
&= 12a(3n+3)+3a(3n+2)+3 \\
&= 12a(3n+3)+3\left[a(3n+2)-1\right]+6
\end{aligned}$$

y de la hipótesis de inducción se tiene que

$$a(3(n+1)+2)-1 = 2\left[6a(3n+3)+3\right]+3\left[a(3n+2)-1\right]$$

es divisible por 2, lo que prueba la hipótesis de inducción.

Así del primer principio de inducción se tiene que

$$a(3n+2)-1$$

es divisble por 2, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

(b) Veamos que

$$3a(3n+1)+5$$

es divisible por 8.

En efecto, si $n=1$, entonces

$$3a(4)+5 = 3\cdot 25+5 = 80,$$

el cual es divisible por 8.

Veamos que se cumple para todos los $n \in N$, $n \geq 1$.

Hipótesis de Inducción

Supongamos que

$$3a(3n+1)+5$$

es divisible por 8.

Tesis de Inducción

Por demostrar que

$$3a(3(n+1)+1)+5$$

es divisible por 8.

En efecto

$$\begin{aligned}
3a(3(n+1)+1)+5 &= 3a(3n+4)+5 \\
&= 3\left(3\left[a(3n+3)+a(3n+2)\right]+1\right)+5 \\
&= 9\left(a(3n+3)+a(3n+2)\right)+8 \\
&= 9a(3n+3)+9a(3n+2)+8 \\
&= 9\left(3\left[a(3n+2)+a(3n+1)\right]+1\right)+9a(3n+2)+8 \\
&= 36a(3n+2)+27a(3n+1)+17 \\
&= 36\left(a(3n+2)\right)+9\left(3a(3n+1)\right)+17 \\
&= 36\left(a(3n+2)-1+1\right)+9\left(3a(3n+1)+5-5\right)+17 \\
&= 36\left(a(3n+2)-1\right)+36+9\left(3a(3n+1)+5\right)-45+17 \\
&= 36\left(a(3n+2)-1\right)+36+9\left(3a(3n+1)+5\right)-45+17 \\
&= 36\left(a(3n+2)-1\right)+9\left(3a(3n+1)+5\right)+8
\end{aligned}$$

así de la hipótesis de inducción se tiene que

$$9\left(3a(3n+1)+5\right)$$

es divisible por 8, además de la parte **(a)** se tiene que

$$\left(a(3n+2)-1\right)$$

es divisible por 2, luego

$$36\left(a(3n+2)-1\right) = 9\cdot 4\left(a(3n+2)-1\right)$$

también es divisible por 8, por lo tanto se concluye que

$$3a(3n+4)+5$$

es divisible por 8.

Lo que prueba la hipótesis de inducción y luego del Primer Principio de Inducción Matemática se concluye que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

$$3a(3n+1)+5$$

es divisible por 8.

(c) Veamos que

$$a(3n)+a(3n+1)$$

es divisible por 32.

En efecto, si $n=1$, entonces

$$a(3)+a(4)=7+25=32$$

el cual es divisible por 32.

Veamos que se cumple para todos los $n \in N$, $n \geq 1$.

Hipótesis de Inducción

Supongamos que

$$a(3n)+a(3n+1)$$

es divisible por 32.

Tesis de Inducción

Por demostrar que

$$a(3(n+1))+a(3(n+1)+1)=a(3n+3)+a(3n+4)$$

es divisible por 32.

En efecto

$$\begin{aligned}
a(3n+3)+a(3n+4) &= a(3n+3)+3\left[a(3n+3)+a(3n+2)\right]+1\\
&= 4a(3n+3)+3a(3n+2)+1\\
&= 4\left(3\left[a(3n+2)+a(3n+1)\right]+1\right)+3a(3n+2)+1\\
&= 15a(3n+2)+12a(3n+1)+5\\
&= 15\left(3\left[a(3n+1)+a(3n)\right]+1\right)+12a(3n+1)+5\\
&= 45\left[a(3n+1)+a(3n)\right]+12a(3n+1)+20\\
&= 45\left[a(3n+1)+a(3n)\right]+4\left[3a(3n+1)\right]+20\\
&= 45\left[a(3n+1)+a(3n)\right]+4\left[3a(3n+1)+5\right]
\end{aligned}$$

así de la hipótesis de inducción se tiene que

$$45\left(a(3n+1)+a(3n)\right)$$

es divisible por 32, además de la parte **(b)** se tiene que

$$3a(3n+1)+5$$

es divisible por 8, luego

$$4\left[3a(3n+1)+5\right]$$

también es divisible por 32, por lo tanto se concluye que

$$a(3n+3)+a(3n+4)$$

es divisible por 32.

Lo que prueba la hipótesis de inducción y luego del Primer Principio de Inducción Matemática se concluye que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

$$a(3n)+a(3n+1)$$

es divisible por 32.