PAUTA CONTROL 1
ALGEBRA MA11A

Problema 1:

(a) Sean p, q, r proposiciones. Pruebe, sin utilizar tablas de verdad, la siguiente proposición:

$$(p \Rightarrow r) \Longrightarrow ((p \wedge q) \Rightarrow r)$$

Solución

Sean p, q, r proposiciones, luego se tiene que

$$\begin{aligned}
(p \Rightarrow r) \quad & \Longleftrightarrow (\sim p \vee r) && \text{definición de } \Rightarrow \\
& \Longrightarrow (\sim p \vee r) \vee (\sim q) && \\
& \Longleftrightarrow (\sim p \vee \sim q) \vee r && \text{conmutatividad de } \vee \\
& \Longleftrightarrow \sim (p \wedge q) \vee r && \text{Leyes de Morgan} \\
& \Longleftrightarrow [(p \wedge q) \Rightarrow r] && \text{definición de } \Rightarrow,
\end{aligned}$$

lo que prueba que

$$(p \Rightarrow r) \Longrightarrow ((p \wedge q) \Rightarrow r)$$

3 puntos

(b) Sean $p(x), q(x)$ dos funciones proposicionales. Muestre que si

$$(\exists!\ x)\,(p(x)) \quad \wedge \quad (\exists!\ x)\,(q(x)),$$

entonces la siguiente implicación es verdadera

$$(\exists\ x)\,(p(x) \wedge q(x)) \Longrightarrow (\exists!\ x)\,(p(x) \wedge q(x)).$$

Solución

Sean $p(x), q(x)$ dos funciones proposicionales tale que

$$(\exists!\ x)\,(p(x)) \quad \wedge \quad (\exists!\ x)\,(q(x)),$$

entonces veamos que

$$(\exists\ x)\,(p(x) \wedge q(x)) \Longrightarrow (\exists!\ x)\,(p(x) \wedge q(x)).$$

En efecto, nos resta ver la unicidad, es decir,

$$(\exists\ x, y)\,(p(x) \wedge q(x)) \wedge (p(y) \wedge q(y)) \Longrightarrow (x = y)\,.$$

Así se tiene de la conmutatividad de $\vee$

$$(\exists\ x, y)\,(p(x) \wedge q(x)) \wedge (p(y) \wedge q(y)) \Longrightarrow (\exists\ x, y)\,(p(x) \wedge p(y)) \wedge (q(x) \wedge q(y))$$

Como

$$(\exists!\ x)\,(p(x)) \quad \wedge \quad (\exists!\ x)\,(q(x)),$$

entonces

$$(\exists\ x, y)\,(p(x) \wedge p(y)) \wedge (q(x) \wedge q(y)) \Longrightarrow (x = y)\,,$$

luego se tiene la unicidad, lo que completa la demostración. **3 puntos**

Problema 2:

(a) Sea $f : X \longrightarrow Y$, una función, entonces pruebe que para todo $A, B \subseteq X$,

$$f(A) \vartriangle f(B) \subseteq \ f(A \vartriangle B).$$

Muestre además que si f es inyectiva, entonces

$$f(A) \vartriangle f(B) = f(A \vartriangle B).$$

Solución

Sea $f : X \longrightarrow Y$, una función, entonces veamos que $A, B \subseteq X$ se tiene

$$f(A) \vartriangle f(B) \subseteq \ f(A \vartriangle B).$$

Veamos en primer lugar que

$$f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B).$$

En efecto

$$\begin{aligned} y \in f(A) \setminus f(B) \ &\Longrightarrow (y \in f(A)) \wedge (y \notin f(B)) \\ &\Longrightarrow (\exists x \in A)(y = f(x)) \wedge (y \notin f(B)). \end{aligned}$$

Pero este $x \in A$ verifica que $x \notin B$. En efecto, si $x \in B$, entonces $y = f(x) \in f(B)$, pero como $y \in f(A) \setminus f(B)$ esto es imposible, lo que muestra que $x \notin B$, así $x \in A \setminus B$, y por lo tanto

$$y = f(x) \in f(A \setminus B).$$

Lo que prueba que

$$f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B).$$

1 punto

Por otra parte, dados dos conjuntos cualquiera $C, D \subseteq A$, se tiene que

$$f(C \cup D) = f(C) \cup f(D),$$

en efecto

$$\begin{aligned} y \in f(C \cup D) \ &\Longleftrightarrow (\exists x \in C \cup D)(y = f(x)) && \text{definición de imagen} \\ &\Longleftrightarrow (\exists x \in C)(y = f(x)) \vee (\exists x \in D)(y = f(x)) && \text{definición de unión} \\ &\Longleftrightarrow y \in f(C) \vee y \in f(D) && \text{definición de imagen} \\ &\Longleftrightarrow y \in f(C) \cup f(D) && \text{definición de unión.} \end{aligned}$$

1 punto

Así se tiene que

$$\begin{aligned} f(A) \vartriangle f(B) \ &= (f(A) \setminus f(B)) \cup (f(B) \setminus f(A)) && \text{definición de } \vartriangle \\ &\subseteq f(A \setminus B) \cup f(B \setminus A) && \text{propiedad anterior} \\ &\subseteq f((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) && \text{propiedad anterior} \\ &= f(A \vartriangle B). && \text{definición de } \vartriangle \end{aligned}$$

Veamos ahora que si f es inyectiva, entonces se tiene la igualdad. En efecto, veamos que si f es inyectiva, entonces

$$f(A) \ \setminus \ f(B) = f(A \ \setminus \ B).$$

1 punto

De la parte anterior se tiene que

$$f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B).$$

Veamos que

$$f(A \setminus B) \subseteq f(A) \setminus f(B).$$

Sea $y \in f(A \setminus B)$, entonces existe $x \in A \setminus B$ talque $y = f(x)$. Luego $y \in f(A)$. Veamos además que $y \notin f(B)$.

Si $y \in f(B)$, entonces existe $x_1 \in B$ tal que $y = f(x_1)$, luego de la inyectividad de la función f se tiene que

$$f(x) = y = f(x_1) \Longrightarrow x = x_1,$$

pero esto es imposible ya que

$$x \in A \setminus B \quad \wedge \quad x_1 \in B,$$

luego $y \notin f(B)$, así $y \in f(A) \setminus f(B)$, lo que prueba que

$$f(A \setminus B) \subseteq f(A) \setminus f(B).$$

y por lo tanto

$$f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B).$$

Luego, si f es inyectiva se tiene que

$$\begin{aligned} f(A \triangle B) &= f((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) = f(A \setminus B) \cup f(B \setminus A) \\ &= (f(A) \setminus f(B)) \cup (f(B) \setminus f(A)) = f(A) \triangle f(B), \end{aligned}$$

lo que completa la demostración. **1 punto**

(b) Sea E un conjunto no vacío y $A \subset E$, veamos que si

$$(\forall\, X, Y \in \mathcal{P}(E))\, (A \cup X = A \cup Y \Rightarrow X = Y\,)\,,$$

entonces $A = \emptyset$.

Solución

Basta considerar $X = A$ e $Y = \emptyset$, entonces se tiene que

$$A \cup X = A \cup A = A = A \cup \emptyset = A \cup Y \Longrightarrow X = Y,$$

es decir

$$A = \emptyset,$$

lo que completa la demostración. **2 puntos**

Problema 3:

Sea $f : A \to B$, una función, no necesariamente biyectiva.

(a) Pruebe que si la función $f : A \to B$ es sobreyectiva, entonces para cada $Y \subset B$, se tiene que

$$f(f^{-1}(Y)) = Y.$$

Solución

Sea $Y \subset B$, veamos que se cumple la igualdad.

Veamos en primer lugar que

$$f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y.$$

En efecto, sea $y \in f(f^{-1}(Y))$, entonces existe $x \in f^{-1}(Y)$ talque $y = f(x)$.

Luego, como $x \in f^{-1}(Y)$, entonces $f(x) \in Y$, es decir

$$y = f(x) \in Y,$$

lo que prueba la inclusión

$$f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y.$$

1 punto

Veamos ahora la otra inclusión, es decir, probemos que

$$Y \subseteq f(f^{-1}(Y)).$$

En efecto, sea $y \in Y$, luego, como f es sobreyectiva, existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$, es decir $x \in f^{-1}(Y)$, por tanto $f(x) \in f(f^{-1}(Y))$, lo que prueba que

$$Y \subseteq f(f^{-1}(Y)).$$

Por lo tanto, de ambas inclusiones se tiene que si f es sobreyectiva, entonces

$$Y = f(f^{-1}(Y)).$$

1 punto

(b) Definamos la función

$$\begin{array}{rcl} F : \mathcal{P}(B) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A) \\ Y & \longrightarrow & F(Y) = f^{-1}(Y). \end{array}$$

Pruebe que F es inyectiva si y sólo si f es sobreyectiva.

Solución

Veamos que si f es sobreyectiva, entonces F es inyectiva.

Sean $Y_1, Y_2 \in \mathcal{P}(B)$ tales que $F(Y_1) = F(Y_2)$. Veamos que $Y_1 = Y_2$.

En efecto, si $F(Y_1) = F(Y_2)$, entonces

$$f^{-1}(Y_1) = f^{-1}(Y_2) \Rightarrow f(f^{-1}(Y_1)) = f(f^{-1}(Y_2)),$$

pero como f es sobreyectiva, de la parte (a) se tiene que

$$Y_1 = f(f^{-1}(Y_1)) = f(f^{-1}(Y_2)) = Y_2,$$

lo que prueba la inyectividad de F. **2 puntos**

Veamos ahora la otra implicación, es decir, probemos que si F es inyectiva, entonces f es sobreyectiva.

En efecto, sea $y \in B$, por demostrar que existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$.

Notemos en primer lugar que

$$F(\emptyset) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset,$$

luego si $y \in B$, entonces como F es inyectiva se tiene que

$$F(\{y\}) = f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset,$$

es decir,

$$\forall y \in B, \quad F(\{y\}) = f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset,$$

luego existe $x \in f^{-1}(\{y\}) \subseteq A$ tal que $y = f(x)$, lo que prueba que f es sobreyectiva.

2 puntos