CONTROL 1
ALGEBRA MA11A

17 DE ABRIL, 2003

Tiempo : 3 horas
Observación : No habrán consultas durante el control

Problema 1:

(a) Sean p, q, r proposiciones. Pruebe, sin utilizar tablas de verdad, la siguiente proposición:

$$(p \Rightarrow r) \Longrightarrow ((p \wedge q) \Rightarrow r)$$

(3 ptos.)

(b) Sean $p(x), q(x)$ dos funciones proposicionales. Muestre que si

$$(\exists!\ x)\,(p(x)) \quad \wedge \quad (\exists!\ x)\,(q(x)),$$

entonces la siguiente implicación es verdadera

$$(\exists\ x)\,(p(x) \wedge q(x)) \Longrightarrow (\exists!\ x)\,(p(x) \wedge q(x)).$$

(3 ptos.)

Problema 2:

(a) Sea $f : X \longrightarrow Y$, una función, entonces pruebe que para todo $A, B \subseteq X$,

$$f(A) \bigtriangleup f(B) \subseteq\ f(A \bigtriangleup B).$$

Muestre además que si f es inyectiva, entonces

$$f(A) \bigtriangleup f(B) = f(A \bigtriangleup B).$$

(4 ptos.)

(b) Sea E un conjunto no vacío y $A \subseteq E$. Pruebe que si

$$(\forall\ X, Y \in \mathcal{P}(E))\,(A \cup X = A \cup Y \Rightarrow X = Y)\,,$$

entonces

$$A = \emptyset.$$

(2 ptos.)

Problema 3:

Sea $f : A \rightarrow B$, una función, no necesariamente biyectiva.

(a) Pruebe que si f es sobreyectiva, entonces para cada $Y \subseteq B$, se tiene que

$$f(f^{-1}(Y)) = Y.$$

(2 ptos.)

(b) Definamos la función

$$\begin{array}{rcl} F : \mathcal{P}(B) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A) \\ Y & \longrightarrow & F(Y) = f^{-1}(Y). \end{array}$$

Pruebe que F es inyectiva si y sólo si f es sobreyectiva.

(4 ptos.)