Auxiliar Introducción al Álgebra - MA1001

Números complejos y polinomios (Control 7)

Auxiliar: Flavio Guíñez A.

Problema 1. Exprese como $a + bi$ los complejos

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{40} \quad \text{y} \quad \frac{(1-i)^{17}}{1+i^{17}}.$$

Problema 2. Pruebe que:

a) Para todo $n \geq 2$ se tiene que las raíces del polinomio $P(z) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}$ son todas las raíces $n-$ésimas de la unidad distintas de 1.

b) Las raíces $n-$ésimas de un complejo cualquiera son el producto de una raíz de un número real por una raíz $n-$ésima de la unidad.

Problema 3. Encuentre todas las raíces de $P(z) = z^4 - 4z^3 + 10z^2 - 12z + 8$, sabiendo que

I) Posee sólo raíces complejas.

II) Una de sus raíces tiene módulo 2.

Problema 4. Determine todos los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen las siguientes propiedades. Dibuje en el plano complejo el conjunto de soluciones.

a) $|z-2| = 1$.

b) $|z+i| + |\bar{z}-i| = 4$.

c) $|z-2| \leq |z-1|$.

d) $|z+2\bar{z}-i| < |z+i|$.

Problema 5. Resuelva las ecuaciones:

a) $z^5 = i$

b) $z^3 - 9z^2 + 33z = 65$.

Problema 6. Dado el polinomio con coeficientes reales no nulos $p(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, pruebe que si $p(x)$ admite una raíz imaginaria pura entonces $a_1^2 + a_0a_3^2 = a_1a_2a_3$.

Problema 7. Sabiendo que -1 y 4 son raíces de $p(x)$, encuentre todas sus raíces para

$$p(x) = x^6 - 3x^5 - 4x^4 + 16x^2 - 48x - 64.$$

Problema 8. Sea $p \in \mathbb{K}[x]$ un polinomio de grado 2 ó 3. Demuestre que p es irreducible ssi p no tiene raíces en $\mathbb{K}$.

Problema 9. Para $p \in \mathbb{C}[x]$ tal que $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, se define el polinomio $D(p)$ como $D(p)(x) = \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}$.

1. Sean $p, q \in \mathbb{C}[x]$. Demuestre que $D(p+q)(x) = D(p)(x) + D(q)(x)$.
2. Asuma que $D(p \cdot q)(x) = D(p)(x)q(x) + p(x)D(q)(x)$, para todos $p, q \in \mathbb{C}[x]$. Pruebe que si $\alpha \in \mathbb{C}$ es una raíz de p, entonces $D(p)(\alpha) = 0$ ssi $(x-\alpha)^2$ divide a $p(x)$.