Auxiliar Introducción al Álgebra - MA1001

Cardinalidad, estructuras algebraicas y grupos (Control 5)

Auxiliar: Flavio Guíñez A.

Problema 1. Sea $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ el conjunto potencia de los naturales. Demuestre que $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}|$. Para ello:

a) Por contradicción, asuma que esto no se cumple. Deduzca que debe existir una biyección $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

b) Defina un conjunto A compuesto de todos los naturales n tales que $n \notin f(n)$ (a los naturales n tales que $n \in f(n)$ los llamamos *autoreferentes*). Demuestre que A no pertenece a la imagen de f y concluya.

c) (Opcional) Demuestre que $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = 2^{|\mathbb{N}|}$. Como indicación piense en el conjunto de sucesiones (∞-tuplas) $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{a = (a_0, a_1, a_2, \ldots) : a_i \in \{0,1\}\}$ y use el hecho que $|A^B| = |A|^{|B|}$ para A finito (que no tiene que demostrar).

   Nota: Es posible modificar la prueba anterior para demostrar que $|X| < |\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$ para todo conjunto X, sea este finito, numerable o no-numerable.

Problema 2. Considere las operaciones f, g dadas por $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ y $g(x) = \frac{1}{2}(x+1)$.

a) Demuestre que f define una biyección entre $\mathbb{R}$ y el intervalo $(-1,1)$.

b) Demuestre que g define una biyección de $(-1,1)$ a $(0,1)$. Concluya que $|(0,1)| = |\mathbb{R}|$.

c) Dados reales a, b tales que $a < b$, encuentre una función biyectiva $h : \mathbb{R} \to (a,b)$.

Problema 3. Sea X un conjunto y $(G, \cdot)$ un grupo.

a) Sea $(\mathcal{F}, \star)$, donde $\mathcal{F} = \{f : X \to G\}$ es el conjunto de funciones de X a G y $\star$ queda definida punto a punto, esto es $(f \star h)(x) = f(x) \cdot h(x)$. Pruebe que $(\mathcal{F}, \star)$ es un grupo.

b) Sea $x_0 \in X$ un elemento fijo y consideremos para todo $g \in G$ el conjunto $\mathcal{F}_g$ de funciones $f : X \to G$ tales que $f(x_0) = g$. ¿Qué condiciones debe cumplir g para que $\mathcal{F}_g$ sea un subgrupo?

Problema 4. Sea X un conjunto y definamos una suma y multiplicación en el conjunto potencia $\mathcal{P}(X)$ mediante,

$$A + B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \text{ and } A \cdot B = A \cap B,$$

for all $A, B \subset X$.

a) Muestre que $(\mathcal{P}(X), +)$ es un grupo abeliano. Note que esta estructura algebraica satisface la propiedad del P3 de la Guía de problemas de la semana 10.

b) Pruebe que $(\mathcal{P}(X), \cdot)$ es asociativa, conmutativa y que tiene elemento neutro.

c) Estudie la existencia de inversos en $(\mathcal{P}(X), \cdot)$ cuando $|X| > 1$.

Problema 5. Sea $(G, \cdot)$ un grupo finito y sea $\sigma : G \to G$ un automorfismo con un único punto fijo, esto es existe un solo $a \in G$ que satisface $\sigma(a) = a$. Demuestre que si $\sigma^2 = id$ entonces $(G, \cdot)$ es abeliano.

a) Encuentre el punto fijo de σ.

b) Defina $f : G \to G$ como $f(x) = x^{-1}\sigma(x)$ y demuestre que f es inyectiva. Use la finitud de G para concluir que f es un isomorfismo.

c) Use el hecho que todo $g \in G$ puede escribirse como $x^{-1}\sigma(x)$, con $x \in G$, para demostrar que $\sigma(g) = g^{-1}$.

d) Demuestre que $(G, \cdot)$ es abeliano.