Auxiliar Extra 1: Introducción al Álgebra

Preparación Control 4

Auxiliar: Orlando Rivera Letelier

Miércoles 06 de Mayo de 2009

P1. Sean $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ y $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dos secuencias de números reales. Considere naturales p y n tales que $p \leq n$. Pruebe que:

$$\sum_{k=p}^n (a_{k+1} - a_k) b_k = a_{n+1} b_{n+1} - a_p b_p - \sum_{k=p}^n a_{k+1} (b_{k+1} - b_k).$$

P2. Demuestre que

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad \sum_{k=0}^n (1-x)^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n+1}{k+1} x^k.$$

P3. Sea $S = 1 + (1+b)q + (1+b+b^2)q^2 + \dots + (1+b+\dots+b^n)q^n$, donde $n \in \mathbb{N}$ y $q, b \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Escribir S como una expresión de dos sumatorias y calcúlela.

P4. Calcule

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(k+1)(k+2)} \binom{n}{k}.$$

P5. Sean p y q reales no negativos tales que $p+q=1$. Calcule

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} k^2.$$

P6. Calcule

$$\sum_{k=0}^n k \cdot k!.$$

P7. Sea $A = \{x \in \mathbb{R} / \exists k \in \mathbb{Z}, \exists i \in \mathbb{N}, x = \frac{k}{3^i}\}$. Pruebe que A es numerable.

P8. Sea A un conjunto infinito, y $f: A \rightarrow \mathbb{N}$ una función tal que:

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad f^{-1}[\{n\}] \text{ es finito o numerable.}$$

Demuestre que A es infinito numerable.

P9. Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de todas las circunferencias en el plano cartesiano cuyos centros tienen coordenadas racionales y su radio es racional, es decir $C \in \mathcal{C} \Leftrightarrow C$ es una circunferencia de centro (a, b) y radio r con $a, b, r \in \mathbb{Q}$.

Pruebe que el conjunto de todos los pares de puntos (P, Q) donde P y Q son los extremos de diámetros horizontales de las circunferencias de $\mathcal{C}$, es infinito numerable.