

Sesión de Trabajo Dirigido (Semana 7)
29 de Abril de 2009

P1 Demuestre que:

$$a) \sum_{k=2}^{n+1} \binom{k}{2} = \binom{n+2}{3}$$

$$b) \sum_{i=1}^n \binom{i+j-1}{j} = \binom{n+j}{j+1}$$

$$c) \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{(k+2)(k+3)} = \frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

P2 Calcule las siguientes sumatorias:

$$a) \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$$

$$b) \sum_{k=0}^n (k+2) \binom{n}{k}^2$$

P3 Calcular $\sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k}$. Para ello estudie previamente las sumas $\sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j}$ y $\sum_{j=0}^{2n} (-1)^j \binom{2n}{j}$.

P4 a) Probar que si $n \geq 0$ y $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, entonces

$$\sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^{n-k} a_{i+k} = \sum_{j=0}^n (j+1) a_j$$

b) Pruebe por inducción que $\forall n \geq 0$, si $m \geq k \geq 0$, entonces

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$$

donde $\binom{a}{b} = 0$ si $a < b$ o $b < 0$. (Observar que con esta conversión la anterior sumatoria tiene un número finito de términos no nulos).

P5 Demuestre sin usar inducción que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\binom{n}{1} x(1-x)^{n-1} + 2 \binom{n}{2} x^2(1-x)^{n-2} + \dots + k \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} + \dots + n \binom{n}{n} x^n = nx$$

P6 a) Encuentre el coeficiente que acompaña a x^n en $(1+x)^{n-p}(1+x)^n$ y demuestre que

$$\sum_{k=p}^n \binom{n-p}{k-p} \binom{n}{k} = \binom{2n-p}{n}$$

b) Calcule $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.