MA1101: Introducción al Algebra
Profesora : María Leonor Varas (Sección 3)
Auxiliares : Sebastián Astroza & Andrés Zúñiga

Clase Auxiliar Extra N° 1

26 de Marzo de 2009

P1 a) Dadas $p,\ q,\ r$ proposiciones, escriba, en función de $p,\ q,\ r$ y de los conectivos lógicos que Ud conoce, una proposición que sólo sea verdadera en los siguientes tres casos: cuando p y r son verdaderas y q es falsa; cuando p, q y r son verdaderas; y cuando p y q son falsas y r es verdadera.

b) Sean $p,\ q,\ r,\ s$ proposiciones. Pruebe, sin usar tablas de verdad, que

$$(p \vee q \Leftrightarrow p \wedge r) \Rightarrow ((q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r))$$

P2 Sean p, q, r y s propociciones. Se sabe que s es verdadera y que

$$s \;\Rightarrow\; ((\overline{p} \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r))$$

es verdadera. Probar que $q \vee r$ es verdadera.

P3 Sean p y q proposiciones. Definamos la proposición,

$$(p \vdash q) \Leftrightarrow (\text{Existe una proposicion } r \text{ tal que} (p \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow q)).$$

Pruebe que $(p \vdash q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$.

P4 (I) Si q y r son proposiciones no equivalentes. Determine el valor de verdad de la proposición:

$$[\overline{(q \vee r)} \wedge (q \wedge r)] \Rightarrow [(p \wedge s) \vee (\overline{s} \vee q)]$$

(II) Considere el conjunto $A = \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$. Diga si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas (justifique):

$$(\forall x, y \in A)\ (x + y \leq 1)$$

$$(\forall x \in A)(\exists y \in A)\ (x^2 \leq y)$$

Escriba la negación de las proposiciones anteriores.

(III) Indique el valor de verdad de la siguiente proposicion. Luego niéguela.

$$(\forall x \in G)(\exists \delta > 0)\ x^2 > \delta,\ \textit{donde} \quad G = \{x \in \mathbb{R}/0 < x < 10\}.$$

P5 Sea A un conjunto, $p(x)$ y $q(x)$ proposiciones para cualquier $x \in A$.
Definimos $P = (\exists x \in A : p(x))$ y $Q = (\exists y \in A : q(y))$.

a) Si $P \Rightarrow Q$ ¿Se puede asegurar que $[\exists x \in A : p(x) \Rightarrow q(x)]$?

b) Si $[\exists x \in A : p(x) \Rightarrow q(x)]$ ¿Se puede asegurar que $P \Rightarrow Q$?

P6 Sea B un subconjunto del universo $\mathcal{U}$. Pruebe que:

$$[(\forall A \subseteq \mathcal{U})(A \cup B = A)] \Rightarrow B = \emptyset.$$

P7 Sean A, B, $C \subseteq \mathcal{U}$. Determine cuales de las siguientes afirmaciones son verdaderas. Justifique su respuesta.

I) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$
II) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
III) Si $A \in B$ y $B \subseteq C$ entonces $A \in C$
IV) Si $A \in B$ y $B \subseteq C$ entonces $A \subseteq C$
V) Si $A \subseteq B$ y $B \in C$ entonces $A \in C$
VI) Si $A \subseteq B$ y $B \in C$ entonces $A \subseteq C$

P8 a) Sean X,Y y A conjuntos (del mismo universo). Pruebe que
$[X \cap A = Y \cap A \;\; y \;\; X \cup A = Y \cup A] \;\Rightarrow\; X = Y$
b) Sean A, B, C conjuntos, pruebe que: $A \subseteq C \Rightarrow A \setminus B = C \setminus [B \cup (C \setminus A)]$
c) Sean A, B conjuntos, demuestre que: $[(A^c \cap B) \cup (A \cap B^c)] = B \Rightarrow A = \emptyset$

P9 Sean A, B, C, D y E subconjuntos de $\mathcal{U}$. Denotamos $C = (A \cup B)^c$. Probar que:

a) $(A \Delta B) \Delta C = A \cup B \cup C \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.
b) $(B \setminus A) \subseteq E \Rightarrow (D \setminus E) \subseteq (D \setminus B) \cup A$.
c) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset\}$.

P10 Sea $A \subseteq E$ y sea $\mathcal{M} = \{X \in \mathcal{P}(E) / A \cap X = \emptyset\}$. Probar que:

I) $\emptyset \in \mathcal{M}$ y $E \setminus A \in \mathcal{M}$.
II) $A \in \mathcal{M} \Leftrightarrow A = \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{M} = \mathcal{P}(E)$.
III) $(\forall X \in \mathcal{M})(\forall Y \in \mathcal{P}(E))\; X \cap Y \in \mathcal{M}$.
IV) $[(X \in \mathcal{M}) \wedge (Y \in \mathcal{M})] \Rightarrow [(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)] \in \mathcal{M}$.

P11 a) Sean A y X conjuntos. Demostrar que $\{[(A \cup X) \setminus (A \Delta X)] \cup [(A \cup X) \setminus A]\} = X$.
b) Dados A, B, C conjuntos, aprovechar el resultado entregado en a) para determinar un conjunto X tal que $(A \Delta X = B)\, y\, (A \cup X = C)$.
c) Probar que en el caso $B = C$ el conjunto X es disjunto con A.

P12 Un conjunto $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(E)$ se llama Álgebra de las partes de E si verifica las siguientes propiedades:

(I) $E \in \mathcal{M}$
(II) $(\forall A, B \in \mathcal{M})\; A \cup B \in \mathcal{M}$
(III) $(\forall A \in \mathcal{M})\; A^c \in \mathcal{M}$

Se pide:

a) Demostrar que $\emptyset \in \mathcal{M}$.
b) Demostrar que $(\forall A, B \in \mathcal{M})\; A \cap B \in \mathcal{M}$.
c) Demostrar que $(\forall A, B \in \mathcal{M})\; A \Delta B \in \mathcal{M}$.
d) Si $E = \{1, 2, 3, 4\}$, averiguar si $\mathcal{M} = \{\emptyset, E, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}\} \subseteq \mathcal{P}(E)$ es un Álgebra. Si no lo es, agregar el menor numero de conjuntos para que lo sea.

Sea lo que sea consigamos con esta clase, un tercio es de playero.