



Clase Auxiliar Extra N°4

28 de Mayo de 2009

P1 Considere el conjunto $\mathbb{Z}_{13} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ con la operación $\cdot_{13}$ de multiplicación módulo 13. Sean $A_1 = \{1, 12\}$, $A_2 = \{1, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, $A_3 = \{1, 5, 8, 12\}$. Señale cual de los conjuntos anteriores con la operación $\cdot_{13}$ es un grupo y cual no lo es. Justifique claramente su respuesta.

P2 Sea $(G, *)$ un grupo y G' un subgrupo de G . Sea $f : G \rightarrow G$ un homomorfismo de grupos que satisface la propiedad: $f(G') \subseteq G'$. Se define el conjunto:

$$V = \{g \in G / \exists n \in \mathbb{N}, f^n(g) \in G'\}$$

donde f^n es la composición de f con ella misma n veces y $f^0 = id_G$. Probar que V es un subgrupo de G .

P3 Considere el grupo abeliano $(G, \bullet)$. Para $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ se define $G^k = \{a^k / a \in G\}$ donde $a^k = a \bullet a \bullet a \bullet \dots \bullet a$ (k veces)

a) Demuestre que $(G^k, \bullet)$ es subgrupo de $(G, \bullet)$

b) En $(\mathbb{Z}_{53}^*, \bullet_{53})$ determine el inverso de $[9]^2$ en que $\mathbb{Z}_{53}^* = \mathbb{Z}_{53} - \{[0]\}$ y $\bullet_{53}$ es el producto en $\mathbb{Z}_{53}$

P4 Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función que verifica para cada $x \in \mathbb{R}$ que $f \circ f(x) = x + 1$. Probar que f no es un morfismo de $(\mathbb{R}, +)$

P5 Sea $S = \mathbb{R} - \{-2\}$ y definamos la operación

$$a * b = 2a + 2b + ab + 2, \quad \forall a, b \in S$$

a) Pruebe $(S, +)$ es un grupo Abeliano.

b) Sea $H = \{2^n - 2 : \forall n \in \mathbb{Z}\}$. Muestre que $(H, *)$ es un subgrupo de $(S, *)$.

c) Pruebe que existe $a \in S$ tal que $H = \{a^m : m \in \mathbb{Z}\}$.

P6 Sea $(G, \cdot)$ un grupo Abeliano de cardinalidad $|G| = 15$. Definamos los conjuntos:

$$F = \{g \in G : g^5 = 1\}$$

$$H = \{g \in G : g^3 = 1\}$$

donde 1 es el neutro del grupo G .

a) Pruebe que F y H son subgrupos de G .

b) Pruebe que $F \cap H = \{1\}$.

c) Pruebe que si F y H no son los subgrupos triviales, entonces $|F| = 5$ y $|H| = 3$. Pruebe además que:

$$\{f \cdot h : f \in F, h \in H\} = G$$

P7 Sea $(G, \odot)$ un grupo con neutro e tal que $|G| < +\infty$ (G es finito).

- i) Para cualquier $h \in G$ pruebe que $\lambda_h : \mathbb{N} \rightarrow G$ tal que $\lambda_h(n) = h^n$ no es inyectiva. Concluya que $\exists m > 0$ tq $h^m = e$.
- ii) Sea $H \subseteq G, H \neq \emptyset$ tal que $\forall h, h' \in H \Rightarrow h \odot h' \in H$.
 - a) Pruebe que si $h \in H$, entonces $h^{-1} \in H$.
 - b) Concluya que H es un subgrupo de G^1 . (Ver nota)

P8 a) Sea $(G, \otimes)$ un grupo abeliano y $H, K \subseteq G$ subgrupos de G . Sea $H \otimes K := \{h \otimes k / h \in H, k \in K\}$. Probar que $H \otimes K$ es un subgrupo de G .

- b) Sea $(G, *)$ un grupo tal que $(\forall g \in G)(\exists n \geq 1) : g^n = \overbrace{g * g * g \dots * g}^{n \text{ veces}} = e_G$. Probar que el único homomorfismo $F : (G, *) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$ es la función constante $F \equiv 0^2$
- c) Sea $(G, \succ)$ un grupo que satisface la propiedad: $(\forall a \in G) : a \succ a = e_G$. Es decir el inverso de cada elemento del grupo, es el mismo elemento. Pruebe que $(G, \succ)$ es un grupo abeliano.

P9 Dado $(G, *)$ un grupo, H un subgrupo de G y $a, b \in G$. Se definen las *traslaciones de H por a y por b* como: $a * H := \{a * h / h \in H\}$ y $H * b := \{h * b / h \in H\}$. Pruebe que:

- a) Si $c \in G$, entonces $c \in H \Leftrightarrow c * H = H$.
- b) $\{x * H\}_{x \in G}$ es una partición de G . *Nota:* Para ello pruebe que $(a * H) \cap (b * H) \neq \emptyset \Rightarrow a * H = b * H$.
- c) Se define los subgrupos *normales* de G , como aquellos que cumplen: $\forall a \in G : a * H = H * a$, donde H es subgrupo de G y se denota $H \triangleright G$. Demuestre que $\forall (G, *)$ grupo se tiene que $\{e_G\} \triangleright G$ y $G \triangleright G$. ¿Si G es un grupo abeliano, quienes son sus subgrupos normales?
- d) Sea $\phi : G \rightarrow G$ un homomorfismo, y $\hat{H} := \{a \in G / \phi(a) = e_G\}$ (es decir $\hat{H} = \text{Ker}(\phi)$). Pruebe que $\hat{H}$ es un subgrupo de G y además $\hat{H} \triangleright G$.

P10 Sea $(G, \star)$ un grupo, X un conjunto no vacío, se define una *acción φ sobre X* como una función $\varphi : G \times X \rightarrow X$ tal que: $\varphi(g, x) \in X$. Denotaremos $g \cdot x := \varphi(g, x)$. Supongamos que φ satisface:

- a) $(\forall x \in X) e \cdot x = x$, e neutro de $(G, \star)$.
- b) $(\forall x \in X)(\forall g, h \in G) : g \cdot (h \cdot x) = (g \star h) \cdot x$.

Dado $x_0 \in X$ definimos el estabilizador por φ de x_0 como $\text{Est}(x_0) := \{g \in G / g \cdot x_0 = x_0\}$.

- i) Pruebe que $\text{Est}(x_0)$ es un subgrupo e $(G, \star)$.
- ii) Sean $x_0, y_0, g_0 \in G$ tales que $g_0 \cdot x_0 = y_0$. Demuestre que $\text{Est}(x_0) = \{g_0^{-1} \star h \star g_0 / h \in \text{Est}(y_0)\}$. Con esto verifique que $\forall h \in G : \text{Est}(h \cdot x_0) = h \star \text{Est}(x_0) \star h^{-1}$.

iii) Sea $\mathbf{R}_{x_0}$ la relación de equivalencia definida en G por: $g \mathbf{R}_{x_0} h \Leftrightarrow g^{-1} \star h \in \text{Est}(x_0)$.

- 1) Pruebe que $(\forall g, h \in G) : [g] = [h] \Rightarrow g \cdot x_0 = h \cdot x_0$. Considere la función $f : G / \mathbf{R}_{x_0} \rightarrow X$, $f([g]) = g \cdot x_0$.
- 2) Demuestre que f es inyectiva.
- 3) Suponga que se verifica lo sgte: $(\forall x, y \in X)(\exists g \in G) : y = g \cdot x$. Pruebe finalmente que f es biyectiva.

¹Con esto habrá demostrado que para grupos finitos, solo basta la cerradura de la operación $\odot$ en H para asegurar que H es subgrupo de G .

²Es decir $F(g) = 0, \forall g \in G$.