Guía No Resuelta de Cardinalidad

P1 i) Se define el siguiente conjunto

$$P_n = \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n, \quad a_0,\ a_1,\ \ldots, a_n \in \mathbb{Z}\}$$

Pruebe que P_n es numerable.

ii) Sea P el conjunto de todos los polinomios con coeficientes enteros

$$P = \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \quad n \in \mathbb{N},\ a_0,\ a_1,\ \ldots, a_n \in \mathbb{Z}\}$$

Demuestre que P es numerable. HINT: Puede usar P12.

P2 Sea

$$L_{\mathbb{Z}} = \{l : l \text{ es una recta en } \mathbb{R}^2 \text{que pasa por } 2 \text{ puntos de coordenadas enteras}\}$$

Muestre que $L_{\mathbb{Z}}$ es numerable.

P3 Sean $a,\ b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$. Pruebe que el intervalo $[a,\ b]$ tiene el mismo cardinal que $\mathbb{R}$.

P4 Muestre que si A, B son conjuntos entonces

$$|A \times B| = |B \times A|$$

P5 Sea A un conjunto cualquiera. Se define $F_A = \{f : A \to \{0,\ 1\} \ / \ f \ es \ función\}$. Demuestre que:

$$|F_A| = |P(A)|$$

P6 Sean B un conjunto numerable y $f : B \to \mathbb{R}$ una función. Demuestre que:

a) $f(B)$ es un conjunto finito o numerable

b) Si f es inyectiva, entonces $|f(B)| = |\mathbb{N}|$

P7 Demuestre que no hay funciones biyectivas entre $\mathbb{N}$ y un conjunto finito cualquiera.

P8 i) Sean A_1, A_2 dos conjuntos numerables. Pruebe que $A_1 \times A_2$ también lo es. Si $A_1,\ A_2,\ \ldots A_n$ son conjuntos numerables, ¿Qué puede decir sobre $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$?.

ii) Muestre que $A = \{x \in \mathbb{R} : x = a + b\sqrt{-1}, \quad a,\ b \in \mathbb{Q}\}$ es numerable.

iii) Sea B un conjunto no vacío. Pruebe que si $B \times \mathbb{N}$ es infinito no numerable, entonces B es infinito no numerable.

P9 Dado $E \subseteq \mathbb{R}$ definimos

$$-E = \{-x : x \in E\}$$

Pruebe que si E es numerable, entonces $-E$ también lo es.

$\boxed{\texttt{P10}}$ Sean A, B, C conjuntos tales que $|A| = |B|$ y $A \cap C = B \cap C = \phi$. Demuestre que

$$|A \cup C| = |B \cup C|$$

$\boxed{\texttt{P11}}$ Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una colección de conjuntos numerables (ie, $\forall\ n \in \mathbb{N},\ A_n$ es un conjunto numerable). Se definen:

- $B_0 = A_0$
- $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k$

Pruebe que:

i) Si $i \neq j$, entonces $B_i \cap B_j = \phi$

ii) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$

$\boxed{\texttt{P12}}$ Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea A_n un conjunto numerable. Muestre que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es un conjunto numerable. Hint: Puede usar P11.

$\boxed{\texttt{P13}}$ Sean $A,\ B \subseteq \mathbb{R}$, definimos:

$$A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$$

Sean A, B conjuntos numerables. Pruebe que:

i) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad A + \{x\}$ es un conjunto numerable.

ii) $\forall x,\ y \in \mathbb{R}, \quad A + \{x, y\}$ es un conjunto numerable.

iii) $A + B$ es un conjunto numerable. Hint: puede usar P12.

$\boxed{\texttt{P14}}$ Se define, para $p,\ q \in \mathbb{Q}$, la siguiente relación $\mathcal{R}$

$$p\mathcal{R}q \Longleftrightarrow p - q \in \mathbb{Z}$$

i) Pruebe que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia.

ii) Demuestre que $\forall q \in \mathbb{Q}$, $[q]_{\mathcal{R}}$ es un conjunto numerable.

$\boxed{\texttt{P15}}$ Demuestre que:

i) Demuestre que la función $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por:

$$f(n, m) = 2^n 3^m$$

es inyectiva.

ii) Usando la parte anterior verifique que $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$