

Clase Auxiliar Extra N°3
23 de Abril de 2009

P1 Sean E_1 y E_2 dos conjuntos no vacíos y $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ relaciones de orden definidas en E_1 y E_2 respectivamente.

- Demuestre que $\mathcal{R}$ definida en $E_1 \times E_2$ por:
 $(x, y)\mathcal{R}(u, v) \Leftrightarrow [x\mathcal{R}_1u \wedge y\mathcal{R}_2v]$ es relación de orden en $E_1 \times E_2$
- Si $|E_1| \geq 2$ y $|E_2| \geq 2$ y $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ son relaciones de orden total, pruebe que $\mathcal{R}$ es sólo de orden parcial.

P2 Sea $\mathcal{Q}$ una relación en $\mathbb{R}$. Se define $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es función}\}$. Además se define en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la relación $\mathcal{R}$ como

$$f\mathcal{R}g \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{0, \dots, n\}, f(k)\mathcal{Q}g(k)$$

- Pruebe que $f\mathcal{R}g \Leftrightarrow f(0)\mathcal{Q}g(0)$
- Muestre que $\mathcal{R}$ es relación de orden $\Leftrightarrow \mathcal{Q}$ es relación de orden.
- Pruebe que si $\mathcal{Q}$ es una relación de equivalencia, entonces $\mathcal{R}$ también lo es. Encuentre $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{R}$. Demuestre además que la función $\varphi : \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathcal{Q}$ definida por $\varphi([f]_{\mathcal{R}}) = [f(0)]_{\mathcal{Q}}$ es inyectiva.

P3 a) Pruebe que: $\sum_{k=1}^{n-1} x^k = \frac{x - x^n}{1 - x}, \quad \forall n \geq 2, x \neq 1$

b) Demuestre que: $\sum_{k=0}^7 [(\sqrt{3})^{7-k}(\sqrt{2})^k] = 65(\sqrt{2} + \sqrt{3})$

c) Sea $\mathcal{S} = 1 + (1+b)q + (1+b+b^2)q^2 + \dots + (1+b+\dots+b^n)q^n$, donde $n \in \mathbb{N}, q, b \in \mathbb{R}, q, b \neq 1$. Escribir $\mathcal{S}$ como una expresión de dos sumatorias y calcúlela.

d) Calcule $\sum_{k=1}^n \frac{k+2}{k(k+1)2^k}$ y $\sum_{i=1}^{2n} (-1)^i \cdot i$

e) Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 3 \quad \frac{3}{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$

P4 Pruebe que todo $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, es un número *primo* o es producto de números primos.

P5 Demuestre que $\forall n \geq 1, \quad 3^{2n} - 1$ es divisible por 8.

P6 Sea E un conjunto no vacío y $\preceq$ una relación de orden total. Se define:

$$\mathcal{P}_F(E) = \{A \in \mathcal{P}(E) : A \text{ es finito}\}$$

Pruebe que:

$$(\forall A \in \mathcal{P}_F(E))(\exists a^* \in A)(\forall a \in A) \quad a^* \preceq a$$

P7 Sea E un cjo no vacío. Considere la relación sobre $\mathcal{P}(E)$ definida por:

$$ARB \Leftrightarrow \exists f : E \rightarrow E, \text{ biyectiva y tal que } f(A) = B.$$

- i) Pruebe que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.
- ii) Pruebe que $[A]_{\mathcal{R}} = \{B \in \mathcal{P}(E) : |A| = |B|, |E \setminus B| = |E \setminus A|\}$.
- iii) Sea $E = \mathbb{Z}$ y $P \subseteq \mathbb{Z}$ el conjunto de los números pares. ¿Es cierto que $(\mathbb{Z} \setminus \{0\})\mathcal{R}P$?

P8 Sea un conjunto $E \neq \emptyset$. Sea además $\mathcal{P}$ una relación refleja y transitiva definida sobre E . Se define una nueva relación $\mathcal{R}$ sobre E dada por:

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a\mathcal{P}b \wedge b\mathcal{P}a.$$

- a) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.
- b) Sea $E/\mathcal{R} = \{[a]_{\mathcal{R}}/a \in E\}$ donde $[a]_{\mathcal{R}} = \{b \in E/a\mathcal{R}b\}$.
 - i) Probar que si $a' \in [a]_{\mathcal{R}} \wedge b' \in [b]_{\mathcal{R}}$ entonces $a'\mathcal{P}b \Leftrightarrow a'\mathcal{P}b'$.
 - ii) Se define la relación $\mathcal{Q}$ sobre $E/\mathcal{R}$ como: $[a]_{\mathcal{R}}\mathcal{Q}[b]_{\mathcal{R}} \Leftrightarrow a\mathcal{P}b$.
Pruebe que $\mathcal{Q}$ es rel. de orden sobre $E/\mathcal{R}$.

P9 Sean X, Y conjuntos y $f : X \rightarrow Y$ una función. Sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia definida sobre Y . Se define en X la relación preimagen de $\mathcal{R}$ que denotamos $f^{-1}(R)$ por:

$$xf^{-1}(R)\bar{x} \Leftrightarrow f(x)\mathcal{R}f(\bar{x}).$$

- i) Probar que $f^{-1}(R)$ es una relación de equivalencia en X .
- ii) Probar que $[x]_{f^{-1}(R)} = f^{-1}([f(x)]_R)$ para cada $x \in X$.

P10 Definamos los conjuntos:

$$\mathcal{F} = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, \text{ función tal que } \forall i \in \mathbb{N} : |f(i+1) - f(i)| = 1\} \text{ y } \mathcal{F}_0 = \{f \in \mathcal{F} : f(0) = 0\}.$$

Se definen las relaciones $\leq$ y $\sim$ de la siguiente manera:

$$f \leq g \Leftrightarrow (\forall i \in \mathbb{N}) f(i) \leq g(i)$$

$$f \sim g \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})(\forall i \in \mathbb{N}) f(i) - g(i) = k$$

- a) Demuestre que $\sim$ es una relación de equivalencia.
- b) Demuestre que $(\forall f \in \mathcal{F})(\exists g \in \mathcal{F}_0) f \sim g$.
- c) Demuestre que existe $h \in \mathcal{F}_0$ tal que $(\forall f \in \mathcal{F}_0) : h \leq f$.
- d) Sean $f, g \in \mathcal{F}_0$ arbitrarios. Demuestre que $(\forall i \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{Z}) : f(i) - g(i) = 2k$.

P11 Sea $\mathcal{R}$ una relación en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida por

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \Leftrightarrow a + b \equiv_2 c + 3d.$$

- a) Pruebe que $\mathcal{R}$ es rel. de equivalencia.
- b) Muestre que $[(0, 0)]_R \cup [(1, 0)]_R = \mathbb{Z}^2$ y que $[(0, 0)]_R \cap [(1, 0)]_R = \emptyset$.