

Clase Auxiliar Extra N°2
09 de Abril de 2009

P1 Sean $f : E \rightarrow F$ y $g : F \rightarrow E$ dos funciones tales que $g \circ f = id_E$. Probar que f es inyectiva y que g es sobreyectiva.

P2 $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definidas en cada $n \in \mathbb{N}$ por $f(n) = 2n + 1$ y $g(n) = n^2 + 1$.

- i) Determinar si f y g son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas.
- ii) Obtener $f \circ g$ y $g \circ f$
- iii) Calcular $(g \circ f)(A)$ y $(f \circ g)^{-1}(A)$ donde $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

P3 Sea $f : E \rightarrow F$ una función.

- a) Discuta y justifique: $\forall A \subseteq F, f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$.
- b) Discuta y justifique: $\forall B \subseteq F, f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$.
- c) Pruebe que: $\forall A \subseteq F, \forall B \subseteq F, f^{-1}(A \Delta B) = f^{-1}(A) \Delta f^{-1}(B)$.

P4 a) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función que verifica para cada $x \in \mathbb{R}$ que $f \circ f(x) = x + 1$. Probar que f es una función biyectiva.

Pruebe además que no es cierto que $f(x + y) = f(x) + f(y)$, para cualquier par de reales x e y .

- b) Sea $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una función que verifica para cada $n \in \mathbb{N}$ que $g \circ g(n) = 2n$. ¿Qué podría decir sobre la biyectividad de g ?
- c) Sea $h : A \rightarrow B$ una función. Pruebe que:

$$h \text{ inyectiva} \Leftrightarrow \exists \xi : B \rightarrow A \text{ tal que } \xi \circ h = id_A$$

P5 a) Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Se define $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ como $\varphi(f) = f(0)$. Demuestre que φ es una función epiyectiva.

b) Sea $f : E \rightarrow F$ una función que satisface la propiedad

$$\forall A, B \subseteq E [A \subseteq B \wedge A \neq B] \Rightarrow f(A) \neq f(B)$$

Pruebe que f es inyectiva.

c) Sea $f : E \rightarrow F$ una función. Pruebe que:

$$f \text{ es biyectiva} \Leftrightarrow \forall (B \subseteq E) f^{-1}(B) = B$$

P6 Sea $f : A \rightarrow B$, una función entre los conjuntos A y B , no necesariamente biyectiva.

a) Pruebe que si f es sobreyectiva, entonces para cada $Y \subseteq B$, se tiene que

$$f(f^{-1}(Y)) = Y$$

b) Definamos la función $\psi : \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ tal que $\psi(Y) = f^{-1}(Y)$.

Pruebe que ψ es inyectiva si y sólo si f es sobreyectiva.

P7 Sea $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ una función con la propiedad siguiente: $f(n + m) = f(n) + f(m)$, $\forall n, m \in \mathbb{Z}$.

- i) Probar que $f(0) = 0$.
- ii) Probar que $f(-m) = -f(m)$ para cada $m \in \mathbb{Z}$.
- iii) Pruebe que f es inyectiva sí y solo si $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$.

P8 a) Dada la función

$$f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$$

Determine el máximo conjunto A donde f es función y el conjunto B de modo que f sea biyectiva. Determine la función inversa de f .

b) Sean $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ y $h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ tres funciones definidas en cada $x \in \mathbb{Z}$ como:

$$f(x) = 1 - x, \quad g(x) = -x - 1 \quad y \quad h(x) = x + 2.$$

- i) Verificar que f , g y h son invertibles
 - ii) Probar que $h \circ g \circ f = g \circ f \circ h = id_{\mathbb{Z}}$.
 - iii) Deducir de (ii) que $f^{-1} \circ g^{-1} = h$.
- c) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ la función tal que $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - x$, en cada $x \in A$.
- i) Demostrar que si $A \subseteq \mathbb{Q}$ entonces f es inyectiva.
 - ii) Si $A = \mathbb{R}$ determinar $f(A)$.

P9 Considere $A = \{1, \dots, n\}$. Sea $B \subseteq A$, $B \neq A$, un subconjunto estricto de A . Definamos $G_B = \{f : A \rightarrow A / f \text{ es biyección y } f(i) = i, \forall i \in B\}$ el conjunto de todas las biyecciones que dejan invariante a B .

- a) Pruebe que $G_B \neq \emptyset$.
- b) Pruebe que si $f \in G_B$ y $g \in G_B$ entonces $g \circ f \in G_B$.
- c) Pruebe que $f \in G_B$ entonces $f^{-1} \in G_B$.

P10 Sea E un conjunto fijo no vacío, y Ψ_A la función característica de A ($\forall A \subseteq E$). Definimos el conjunto de todas las funciones de E en $\{0, 1\}$; esto es $\mathcal{F} = \{f : E \rightarrow \{0, 1\} / f \text{ es función}\}$. Además se define la función λ por:

$$\lambda : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{F}$$

$$A \mapsto \lambda(A) = \Psi_A.$$

Demuestre que λ es biyectiva.