UChile	Introducción al Álgebra	Mauricio Telias
FCFM	MA1101-1	Tomás Gonzalez
DIM	Otoño '09	Víctor Riquelme

Resolución de Problemas Aleatorios

Problema 1 *Sea $p(x) = x^3+ax^2+bx+c$ un polinomio con coeficientes en $\mathbb{R}$. Sea $r(x)$ el resto de la division de $p(x)$ por $(x-1)$. Si $r(4) = 0$ y $x = i$ es raiz de $p(x)$, calcule a, b, c.*

Solucion

Por el teorema de la división sabemos que $p(x) = q(x)D(x) + r(x)$, con $D(x) = (x-1)$ el divisor y $r(x)$ el resto, con $gr(r) < gr(D) = 1$. Asi, $r(x) = r = cte$ (puede ser 0), por lo que $p(x) = q(x)(x-1) + r$.
Ademas, como $r(4) = 0$, se tiene que $r = 0$, de donde nuestro polinomio queda

$$p(x) = q(x)(x-1)$$

El grado de $q(x)$ es menor o igual a 2.
También sabemos que $x = i$ es raiz de $p(x)$ (por lo que tambien es raiz de $q(x)$), y ademas como $p(x)$ es polinomio a coeficientes reales, $x = -i$ tambien es raiz.
Nuestro polinomio entonces la forma

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-i)(x+i)(x-1) \\ &= (x^2+1)(x-1) \\ &= x^3 - x^2 + x - 1 \end{aligned}$$

Entonces, $a = -1$, $b = 1$, $c = -1$.

Problema 2 *Sea $J_2 = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] | gr(p) \leq 2, a_0 = 0, a_1 \neq 0\}$. En J_2 se define la l.c.i. $\triangle$ a traves de $p(x) \triangle q(x) = \sum_{i=1}^{2} c_i x^i$, donde $p(q(x)) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$.*

1. *Probar que $(J_2, \triangle)$ es grupo no abeliano.*
2. *Sea $f : J_2 \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ tal que $f(a_1x + a_2x^2) = a_1$. Probar que f es morfismo sobreyectivo de $(J_2, \triangle)$ en $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$.*
3. *Sea $H = \{p(x) \in J_2 | a_1 = 1\}$. Probar que $(H, \triangle)$ es subgrupo abeliano de $(J_2, \triangle)$.*

Solucion

(a) Primero veamos que forma tiene el polinomio $p(x) \triangle q(x)$. Sean $p(x) = a_1x + a_2x^2$ y $q(x) = b_1x + b_2x^2$ (de aqui en adelante)

$$\begin{aligned} p(q(x)) &= p(b_1x + b_2x^2) \\ &= a_1(b_1x + b_2x^2) + a_2(b_1x + b_2x^2)^2 \\ &= a_1b_1x + a_1b_2x^2 + a_2(b_1^2x^2 + b_2^2x^4 + 2b_1b_2x^3) \\ &= a_1b_1x + a_1b_2x^2 + a_2b_1^2x^2 + a_2b_2^2x^4 + 2a_2b_1b_2x^3 \\ &= [a_1b_1x + (a_1b_2 + a_2b_1^2)x^2] + 2a_2b_1b_2x^3 + a_2b_2^2x^4 \end{aligned}$$

Entonces, $p(x)\triangle q(x) = a_1b_1x + (a_1b_2 + a_2b_1^2)x^2$
Ahora vemos que $p(x)\triangle q(x) \in J_2$, porque como $a_1, b_1 \neq 0$ entonces $a_1b_1 \neq 0$, y tiene grado menor o igual a 2.
Para probar que existe neutro, encontremos un candidato y veamos que lo es. Sea $e(x) = b_1x+b_2x^2 \in J_2$ tal que $p(x)\triangle e(x) = p(x)$.

$$p(x)\triangle e(x) = a_1b_1x + (a_1b_2 + a_2b_1^2)x^2 = a_1x + a_2x^2 = p(x)$$

De lo anterior, $a_1b_1 = a_1$ (entonces $b_1 = 1$), y $a_2 = a_1b_2 + a_2b_1^2 = a_1b_2 + a_2$, de donde se tiene que $b_2 = 0$ (porque $a_1 \neq 0$).
El postulante a neutro es $e(x) = x$. Falta ver que $e(x)\triangle p(x) = p(x)$ (comprobarlo).

Ahora, encontrar los inversos. Supongamos que $p(x)\triangle q(x) = e(x)$, entonces

$$p(x)\triangle q(x) = a_1b_1x + (a_1b_2 + a_2b_1^2)x^2 = 1x + 0x^2 = e(x)$$

Lo anterior dice que $a_1b_1 = 1$ (de donde $b_1 = 1/a_1$), y $a_1b_2 + a_2b_1^2 = 0$, de donde $b_2 = -a_2/a_1^3$. El postulante a inverso de $p(x)$ seria $q(x) = \frac{1}{a_1}x - \frac{a_2}{a_1^3}x^2$. Falta ver que se tiene $q(x)\triangle p(x) = e(x)$ (entonces $p(x)^{-1} = q(x)$) (comprobarlo).
Para ver la asociatividad, sean $p(x) = a_1x + a_2x^2$, $q(x) = b_1x + b_2x^2$, $r(x) = c_1x + c_2x^2$.

$$\begin{aligned} p(x)\triangle q(x) &= a_1b_1x + (a_1b_2 + a_2b_1^2)x^2 \\ q(x)\triangle r(x) &= b_1c_1x + (b_1c_2 + b_2c_1^2)x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (p(x)\triangle q(x))\triangle r(x) &= a_1b_1c_1x + (a_1b_1c_2 + (a_1b_2 + a_2b_1^2)c_1^2)x^2 \\ &= a_1b_1c_1x + (a_1b_1c_2 + a_1b_2c_1^2 + a_2b_1^2c_1^2)x^2 \\ p(x)\triangle(q(x)\triangle r(x)) &= a_1b_1c_1x + (a_1(b_1c_2 + b_2c_1^2) + a_2(b_1c_1)^2)x^2 \\ &= a_1b_1c_1x + (a_1b_1c_2 + a_1b_2c_1^2 + a_2b_1^2c_1^2)x^2 \end{aligned}$$

de donde se ve la igualdad.

Para ver la no abelianidad, basta con un contraejemplo. Sean $p(x) = x + 2x^2$, $q(x) = 2x + x^2$.

$$\begin{aligned} p(x)\triangle q(x) &= 1 \times 2x + (1 \times 1 + 2 \times 1^2) \\ &= 2x + 3x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q(x)\triangle p(x) &= 2 \times 1x + (2 \times 2 + 1 \times 2^2)x^2 \\ &= 2x + 8x^2 \end{aligned}$$

(b) Para probar que f es morfismo debemos probar que $f(p(x)\triangle q(x)) = f(p(x)) \cdot f(q(x))$.

$$\begin{aligned} f(p(x)\triangle q(x)) &= f(a_1b_1x + (a_1b_2 + a_2b_1^2)x^2) \\ &= a_1b_1 \\ &= f(p(x))f(q(x)) \end{aligned}$$

Para probar que es sobreyectivo se debe probar que para cualquier $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ existe $p(x) \in J_2$ tal que $f(p(x)) = a$. Tomando $p(x) = ax$ se concluye.

(c) Sean $p(x) = a_1x + a_2x^2 \in H$, $q(x) = b_1x + b_2x^2 \in H$. Hay que demostrar que $p(x)\triangle q(x)^{-1} \in H$.

$$\begin{aligned} q(x)^{-1} &= \frac{1}{b_1}x - \frac{b_2}{b_1^3}x^2 \\ &\Rightarrow \\ p(x)\triangle q(x)^{-1} &= \frac{a_1}{b_1}x + \left(a_1\frac{-b_2}{b_1^3} + a_2\frac{1}{b_1^2}\right)x^2 \end{aligned}$$

Como $a_1 = b_1 = 1$, lo anterior pertenece a H.

Para ver la abelianidad:

$$p(x)\triangle q(x) = a_1b_1x + (a_1b_2 + a_2b_1^2)x^2 = x + (b_2 + a_2)x^2$$

$$q(x)\triangle p(x) = b_1a_1x + (b_1a_2 + b_2a_1^2)x^2 = x + (a_2 + b_2)x^2$$

se ve la igualdad.

Problema 3 *Si $n = 3k \pm 1$ para algun $k \in \mathbb{N}$, probar sin usar induccion que $p(x) = x^{2n} + 1 + (x+1)^{2n}$ es divisible por $q(x) = x^2 + x + 1$.*

Solucion

Nos basta probar que las raices de $q(x)$ son raices de $p(x)$.
Las raices de $q(x)$ son:

$$\begin{aligned} q(\bar{x}) = 0 &\Leftrightarrow \bar{x} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\Leftrightarrow \bar{x} = e^{\pm i\frac{2\pi}{3}} \end{aligned}$$

Probemos que $p(\bar{x}) = 0$ para los $\bar{x}$ anteriores. Para ello notemos que

$$\bar{x} + 1 = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$$

y entonces

$$\begin{aligned} p(\bar{x}) &= \bar{x}^{2n} + 1 + (\bar{x}+1)^{2n} \\ &= (e^{\pm i\frac{2\pi}{3}})^{2n} + 1 + (e^{\pm i\frac{\pi}{3}})^{2n} \\ &= e^{\pm i\frac{4\pi}{3}n} + 1 + e^{\pm i\frac{2\pi}{3}n} \\ &= e^{\pm i\frac{4\pi}{3}(3k\pm 1)} + 1 + e^{\pm i\frac{2\pi}{3}(3k\pm 1)} \\ &= e^{\pm i4\pi k \pm i\frac{4\pi}{3}} + 1 + e^{\pm i2\pi k \pm i\frac{2\pi}{3}} \\ &= e^{\pm i4\pi k} e^{\pm i\frac{4\pi}{3}} + 1 + e^{\pm i2\pi k} e^{\pm i\frac{2\pi}{3}} \\ &= e^{\pm i\frac{4\pi}{3}} + 1 + e^{\pm i\frac{2\pi}{3}} \end{aligned}$$

Notemos que las anteriores son las raices-terceras de la unidad, por lo que al sumarlas da 0 ($e^{-i\frac{4\pi}{3}} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ y $e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$), por lo que las raices de q son raices de p (y entonces p es factorizable por q).

Problema 4 *Sea $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$ el cuerpo de dos elementos: $\{0,1\}$. Consideremos $\mathbb{Z}_2[x]$ el conjunto de los polinomios a coeficientes en $\mathbb{Z}_2$, con operaciones $+_2, \cdot_2$. Demostrar que $|\mathbb{Z}_2[x]| = |\mathbb{N}|$. Cuantas funciones existen de $\mathbb{Z}_2$ en Z_2?.*

Solucion

Primero, recordemos que el conjunto de todas las funciones de $\mathbb{Z}_2$ en $\mathbb{Z}_2$ es $\mathbb{Z}_2^{Z_2}$, por lo que el cardinal de este conjunto es $|\mathbb{Z}_2^{\mathbb{Z}_2}| = |\mathbb{Z}_2|^{|\mathbb{Z}_2|} = 2^2 = 4$.

Ahora, los polinomios estan definidos POR SUS COEFICIENTES (son estos los que hay que analizar), no por sus evaluaciones (las funciones estan definidas por sus evaluaciones).

Primero, definimos $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_2[x]$ por $f(n)(x) = 1 \cdot x^n$. Vemos que esta funcion es inyectiva, pues si $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ son tales que $f(n_1) = f(n_2)$, son iguales coeficiente a coeficiente. Esto implica que el coeficiente que acompaa a x^{n_1} es igual al que acompaa a x^{n_2}, y ambos coeficientes son los unicos distintos de cero en ambos polinomios. Por lo tanto debe tenerse que $n_1 = n_2$. Entonces $|N| \leq |\mathbb{Z}_2|$

Ahora, consideremos $\mathbb{Z}_2[x]_n$ el subconjunto de $\mathbb{Z}_2[x]$ de polinomios de grado menor o igual a n. Entonces $\mathbb{Z}_2[x] = \bigcup_{n\geq 0} \mathbb{Z}_2[x]_n$. Ahora, notemos que $|\mathbb{Z}_2[x]_n| = 2^{n+1}$ (pues es el numero total de combinaciones de coeficientes 0 o 1 de largo $n+1$, donde importa el orden). Asi, $\mathbb{Z}_2[x]$ es union numerable de conjuntos finitos, por lo que $|\mathbb{Z}_2[x]| \leq |\mathbb{N}|$.