

MA1002 - Cálculo Diferencial e Integral. Semestre 2009-01

Profesor: Raúl Manasevich.

Auxiliares: Sebastián Reyes Riffo, Víctor Verdugo.

Clase auxiliar 7

29/abril

P1. Hallar las integrales superior e inferior en el intervalo $[0, 1]$ de la función f definida como sigue: $f(x) = 0$, si $x \in Q$, $f(x) = x$, si $x \in R - Q$

P2. Sean f y g dos funciones reales que están definidas y acotadas en un compacto $[a, b]$. Se sabe que f es integrable en $[a, b]$ y que para ciertos puntos $d_1, d_2, \dots, d_n$ de $[a, b]$, es:

$$g(x) = f(x), \text{ si } x \neq d_1, d_2, \dots, d_n$$

$$g(d_i) \neq f(d_i), \text{ para } i = 1, 2, \dots, n$$

Pruebe que g es integrable en $[a, b]$ y que

$$\int_a^b g = \int_a^b f$$

P3. Sea $f :]1, \infty[\rightarrow R$ una función no negativa y creciente.

a) Usando la partición $P = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ pruebe que

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(i) \leq \int_1^n f(x) dx \leq \sum_{i=2}^n f(i), \quad \forall n \geq 2$$

b) Considere $f(x) = \ln(x)$ y utilice la parte anterior para demostrar que

$$(n-1)! \leq n^n e^{-n+1} \leq n!, \quad \forall n \geq 1$$

P4. Usando la partición $P = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$, demuestre que

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{e^{1/4}} + \frac{1}{e} \right) \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{e^{1/4}} \right)$$