MA1002 - Cálculo Diferencial e Integral. Semestre 2009-01
Profesor: Raúl Manasevich.
Auxiliares: Sebastián Reyes Riffo, Víctor Verdugo.

Clase auxiliar 01

18/Marzo

P1. Sea $f : R \to R$ una función tal que
· $f(x) > 0\ \forall x \in R$
· $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$
· f es continua en R

Pruebe que $\exists x_0 \in R\ /\ f(x) \leq f(x_0)\ \forall x \in R$ y que $f(R) =]0, f(x_0)]$.

P2. Sea $f : R \to R$ continua. Pruebe que si $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in R$, entonces $f(x) = ax$, con $a = f(1)$.

P3. Estudiar la continuidad de

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2 + x^{2n} sen(\frac{\pi x}{2})}{x^{2n} + 1}\ ,\ \forall x \in R$$

P4. Definimos

$$tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

a) Verifique que tanh es continua en todo R, que $tanh(0) = 0$ y que $-1 < tanh(x) < 1\ \forall x \in R$.
b) Pruebe que si $x \to \infty \Rightarrow tanh(x) \to 1$ y $tanh(-x) \to -1$
c) Demuestre que $\forall y \in]-1, 1[\ ,\ \exists x \in R\ /\ tanh(x) = y$.

P5. Sea $f : R \to R$ continua, tal que $\forall x \in R$, $f(x) \geq |x|$. Probaremos que tiene un mínimo global, es decir, que $\exists a \in R\ /\ \forall x \in R\ f(a) \leq f(x)$

a) Sea $I = [-f(0), f(0)]$. Demuestre que $\forall x \in I^c\ ,\ f(x) > f(0)$
b) Concluya que f tiene un mínimo global.