

Control Recuperativo, MA1001 Introducción al Cálculo
Departamento de Ingeniería Matemática, FCFM, U. de Chile
Semestre 2008/1 (5 de Junio)

Instrucciones:

- *Elija sólo 4 de las 6 preguntas siguientes. Si obtiene N puntos, su nota será $N_{Rec} = N + 1$.*
- *Sólo si N_{Rec} es mejor que su peor nota entre los controles 1 a 5, N_{Rec} reemplazará al control correspondiente.*

P.1) (1.5 ptos.) Demuestre la siguiente desigualdad

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{x^3}{y^3} - \frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{y} + 1 \geq 0$$

Solución

Factorizando se tiene que

$$\frac{x^3}{y^3} - \frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{y} + 1 = \left(\frac{x}{y} - 1\right) \left(\frac{x^2}{y^2} - 1\right) = \left(\frac{x}{y} - 1\right)^2 \left(\frac{x}{y} + 1\right)$$

.....

1.0 ptos.

Usando esto, como $\left(\frac{x}{y} - 1\right)^2 \geq 0$ por ser un cuadrado y $\left(\frac{x}{y} + 1\right) > 0$ por ser números positivos, se concluye.

0.5 ptos.

P.2) (1.5 ptos.) Para $a > 1$ se define el conjunto $A = \{x > 0 : \frac{ax}{a+x} \geq 1\}$.

Determine, si es que existen, ínfimo, supremo, mínimo y máximo de A .

Solución

Como $x, a > 0$, la inecuación es equivalente a $(a-1)x \geq a$. Como además $a > 1$ se obtiene que $A = [\frac{a}{a-1}, \infty)$

0.5 ptos.

Este conjunto es acotado inferiormente de modo que $\inf(A) = \min(A) = \frac{a}{a-1}$

0.5 ptos.

Este conjunto no es acotado superiormente, de modo que $\sup(A)$ y $\max(A)$ no existen. .

0.5 ptos.

P.3) (1.5 ptos.) Dos lados de un triángulo forman un ángulo de 120° y miden a y b . Si el ángulo opuesto al lado a lo llamamos α , demuestre que

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a\sqrt{3}}{a + 2b}$$

Solución

El ángulo opuesto al lado b es $\beta = \pi - \frac{2\pi}{3} - \alpha = \frac{\pi}{3} - \alpha$

0.3 ptos.

Aplicando el teorema del seno se tiene que

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{b}$$

Pero usando lo anterior, queda

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{3} - \alpha)}{b}$$

.....

0.3 ptos.

Desarrollando el seno de la suma queda

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{3}) \cos \alpha - \cos(\frac{\pi}{3}) \operatorname{sen} \alpha}{b}$$

.....

0.3 ptos.

Dividiendo por $\cos \alpha$ y despejando se obtiene

$$\tan \alpha = \frac{a \operatorname{sen}(\frac{\pi}{3})}{a \cos(\frac{\pi}{3}) + b}$$

.....

0.3 ptos.

El resultado pedido se obtiene al considerar que $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$

0.3 ptos.

P.4) (1.5 ptos.) Considere la función definida por la ley $f(x) = \frac{1}{x-[x]}$.

Determine dominio, ceros, signos y periodicidad.

Encuentre asíntotas verticales e indique si es inyectiva o sobreyectiva.

Solución

Dominio: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

0.2 ptos.

Ceros: no tiene

0.2 ptos.

Signos: $f(x) > 0$ en todo su dominio.

0.2 ptos.

Periodicidad: Es periódica de período 1.

0.2 ptos.

Asíntotas verticales: En cada punto de $\mathbb{Z}$

0.3 ptos.

Inyectividad: No es inyectiva ya que es periódica.

0.2 ptos.

Sobreyectividad: No es sobreyectiva ya que es positiva.

0.2 ptos.

P.5) (1.5 ptos.) Determine el Lugar Geométrico de los puntos medios de las cuerdas de la parábola $y^2 = 4px$ que pasan por el vértice. Identifique completamente el lugar geométrico encontrado.

Solución

El punto (α, β) pertenece al lugar geométrico ssi el punto $(2\alpha, 2\beta)$ pertenece a la parábola.

..... 0.5 ptos.

Es decir, $4\beta^2 = 8p\alpha$.

Luego la ecuación del lugar geométrico es $y^2 = 2px$ 0.5 ptos.

Esto corresponde a una parábola de foco $F(\frac{1}{2}, 0)$ y directriz $x = -\frac{1}{2}$ 0.5 ptos.

P.6) (1.5 ptos.) Dado $a > 0$, considere la sucesión definida por la recurrencia

$$s_1 = 1, \quad s_{n+1} = \frac{s_n^2 + a^2}{2s_n}.$$

Pruebe que $\forall n \geq 1, s_{n+1} - a \geq 0$. Use esto para deducir que (s_n) es monótonamente convergente y determinar su límite.

Solución

Calculamos la primera diferencia y obtenemos:

$$s_{n+1} - a = \frac{s_n^2 + a^2 - 2s_na}{2s_n} = \frac{(s_n - a)^2}{2s_n} \geq 0$$

..... 0.4 ptos.

Ahora veamos el crecimiento:

$$s_{n+1} - s_n = \frac{a^2 - s_n^2}{2s_n} \leq 0.$$

..... 0.4 ptos.

Como es decreciente y acotada inferiormente, es convergente. Sea ℓ su límite. Claramente $\ell \geq a$ 0.4 ptos.

Tomando límite en la fórmula de recurrencia se obtiene $\ell^2 = a^2$ y por lo tanto $\ell = a$ 0.3 ptos.